Grundbegriffe der Informatik

Tutorium 1 - 3. Sitzung

Dennis Felsing

dennis.felsing@student.kit.edu
http://www.stud.uni-karlsruhe.de/~ubcqr/2010w/tut_gbi/

2010-11-08

Karlsruhe Institute of Technology

Überblick

1. Mengen
2. Formale Sprachen

Mengen - Aufgaben

$\{1,2,3\} \cup \{4,3,2\} = \{1,2,3,4\}$
$\{1,2,3\} \cap \{4,3,2\} = \{2,3\}$
$\{1,2,3\} \setminus \{4,3,2\} = \{1\}$

Sei M eine beliebige Menge.
$M \cup \{\} = M$
$M \cap \{\} = \{\}$
$M \setminus \{\} = M$

$M_1 \cup M_2 = \{x \mid x \in M_1 \vee x \in M_2\}$
$M_1 \cap M_2 = \{x \mid x \in M_1 \wedge x \in M_2\}$
$M_1 \setminus M_2 = \{x \mid x \in M_1 \wedge x \notin M_2\}$

Formale Sprachen

1 Mengen

2 Formale Sprachen
- Definition
- Produkte
- Potenzen
- Konkatenationsabschluss

Formale Sprachen

Definition

Sei A ein Alphabet, also eine endliche, nichtleere Menge von Zeichen.
Dann ist A^* die Menge aller Wörter über A, also alle Wörter, die sich aus den Zeichen aus A bilden lassen.
$L \subseteq A^*$ heißt die formale Sprache über dem Alphabet A.

Beispiel

Formale Sprache aller Schlüsselwörter in Java:
$L = \{class, if, public, int, ...\}$

Aufgaben

Aufgabe

Bestimme die formale Sprache L aller Wörter über $A = \{a, b\}$, in denen das Teilwort *ab* nicht vorkommt.

$L = \{a, b\}^* \setminus \{w_1abw_2 \mid w_1, w_2 \in \{a, b\}^*\}$

Was bleibt bei dieser Mengendifferenz übrig? Wie formuliert man das positiv?

$L = \{w_1w_2 \mid w_1 \in \{b\}^* \wedge w_2 \in \{a\}^*\}$

Produkte

Definition

Seien A und B formale Sprachen.
$A \cdot B = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in A \wedge w_2 \in B\}$ heißt das Produkt oder die Konkatenation von A und B.

Beispiel

Formale Sprache L aller Wörter über $A = \{a, b\}$, in denen das Teilwort ab nicht vorkommt:
Letzte Folie: $L = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in \{b\}^* \wedge w_2 \in \{a\}^*\}$
Einfacher: $L = \{b\}^* \cdot \{a\}^* = \{b\}^*\{a\}^*$

Achtung

$\{Alice, Bob\} \cdot \{X, Y\} = \{AliceX, AliceY, BobX, BobY\}$
$\{X, Y\} \cdot \{Alice, Bob\} = \{XAlice, YAlice, XBob, YBob\}$

Aufgaben

Bestimme die formale Sprache L_I der legalen Zahlen vom Typ `int`.
$A = \{0, ..., 9\}$
$L_I = \{\varepsilon, -\} \cdot A \cdot A^*$

Bestimme die formale Sprache L_V der legalen Variablennamen in Java.
$A = \{\_, a, ..., z, A, ..., Z\}, B = A \cup \{0, ..., 9\}$
$L_V = (A \cdot B^*) \setminus \{if, class, ...\}$

Seien $L_1 = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ und $L_2 = \{b^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$.
$L_1 \cdot L_2 = \{a^k \cdot b^m \mid k \in \mathbb{N}_0 \land m \in \mathbb{N}_0\}$
Die Exponenten können verschieden sein!

Potenzen

Definition

$L^0 = \{\varepsilon\}$
$\forall i \in \mathbb{N}_0 : L^{i+1} = L^i \cdot L$

Beispiel

$L = \{a\}^*\{b\}^*$
$L^0 = \{\varepsilon\}$
$L^1 = L^0 \cdot L = \{\varepsilon\} \cdot L = L = \{\varepsilon, abb, aaab, aaaaaa, bbbbbbbbb, \ldots\}$
$L^2 = L^1 \cdot L = L \cdot L = \{\varepsilon, abb, aaabaabb, abbbaa, aaaaa, bbba, \ldots\}$
$\ldots$

Konkatenationsabschluss

Definitionen

Konkatenationsabschluss $L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup L^3 \dots$

ε-freier Konkatenationsabschluss $L^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} L^i = L^1 \cup L^2 \cup L^3 \dots$

Beispiele

$L_1 = \{a\}^* \{b\}^*$
$L_1^* = \{a, b\}^*$
$L_2 = \{b\}$
$L_2^+ = \{b\} \cdot \{b\}^*$

Achtung

Verwirrende Bezeichnung „ε-frei“: $\varepsilon \in L^+ \Leftrightarrow \varepsilon \in L$.

Aufgabe

Beweise: $L^* \cdot L = L^+$

Idee: Man zeigt $L^* \cdot L \subseteq L^+$ und $L^* \cdot L \supseteq L^+$.

„$\subseteq$“ Wenn $w \in L^* \cdot L$, dann $w = w'w''$ mit $w' \in L^*$ und $w'' \in L$.
Also existiert ein $i \in \mathbb{N}_0$ mit $w' \in L^i$.
Also $w = w'w'' \in L^i \cdot L = L^{i+1}$.
Da $i + 1 \in \mathbb{N}_+$, ist $L^{i+1} \subseteq L^+$, also $w \in L^+$.

„$\supseteq$“ Wenn $w \in L^+$, dann existiert ein $i \in \mathbb{N}_+$ mit $w \in L^i$.
Da $i \in \mathbb{N}_+$, ist $i = j + 1$ für ein $j \in \mathbb{N}_0$.
Also ist für ein $j \in \mathbb{N}_0$: $w \in L^{j+1} = L^j \cdot L$.
Also $w = w'w''$ mit $w' \in L^j$ und $w'' \in L$.
Wegen $L^j \subseteq L^*$ ist $w = w'w'' \in L^* \cdot L$.

Übersicht

1. Mengen
2. Formale Sprachen
   - Definition
   - Produkte
   - Potenzen
   - Konkatenationsabschluss