

Grundbegriffe der Informatik

Tutorium 1 - 4. Sitzung

Dennis Felsing

dennis.felsing@student.kit.edu

http://www.stud.uni-karlsruhe.de/~ubcqr/2010w/tut_gbi/

2010-11-15



- 1 **Algorithmen**
 - div und mod
 - Informeller Algorithmusbegriff
 - Schleifeninvariante
 - Aufgabe
 - Aufgabe 3.2 von 2008
 - Aufgabe 3.1 von 2008

div und mod

div

Der Operator **div** stellt die Ganzzahldivision dar.

Es gilt: $a \mathbf{div} b = x, x \in \mathbb{Z}, x \cdot b \leq a < (x + 1) \cdot b$

mod

Der Operator **mod** liefert den Rest der Ganzzahldivision.

Es gilt: $0 \leq (x \mathbf{mod} y) < y$

Und: $x = y \cdot (x \mathbf{div} y) + (x \mathbf{mod} y)$

Aufgaben

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$x \mathbf{div} 4$	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2
$4(x \mathbf{div} 4)$	0	0	0	0	4	4	4	4	8	8	8	8
$x \mathbf{mod} 4$	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3

x	7	20	256	999	6	12	13
y	3	4	10	1000	3	5	7
$x \mathbf{div} y$	2	5	25	0	2	2	1
$x \mathbf{mod} y$	1	0	6	999	0	2	6

Was sagt uns $x \mathbf{mod} 2$ über x ? Wenn $x \mathbf{mod} 2 = 0$, dann ist x gerade. Wenn $x \mathbf{mod} 2 = 1$, dann ist x ungerade.

Informeller Algorithmusbegriff

Algorithmus als Beschreibung einer Folge von Anweisungen mit diesen Merkmalen:

Endliche Beschreibung: Kein unendlicher Text als Beschreibung

Elementare Anweisungen: Einfach ausführbar

Determinismus: Eindeutig welche Anweisung als nächstes

Endliche Eingabe: Arbeitet auf endlichem Wort

Endliche Ausgabe: Gibt endliches Wort aus

Terminierung: Endet nach endlich vielen Schritten

Beliebig große Eingaben: Keine Längenbeschränkung

Nachvollziehbarkeit: Fachleute verstehen Algorithmus

Beispiel

//Eingaben : $a, b \in \mathbb{N}_0$

$S_0 \leftarrow a$

$Y_0 \leftarrow b$

for $i \leftarrow 0$ **to** $b - 1$ **do**

$S_{i+1} \leftarrow S_i + 1$

$Y_{i+1} \leftarrow Y_i - 1$

od

bzw.

//Eingaben : $a, b \in \mathbb{N}_0$

$S \leftarrow a$

$Y \leftarrow b$

for $i \leftarrow 0$ **to** $b - 1$ **do**

$S \leftarrow S + 1$

$Y \leftarrow Y - 1$

od

Schleifeninvariante

Definition

Eine Schleifeninvariante ist eine Aussage, die vor und nach jeder Schleifenausführung gilt.

Nützlich für Beweise. Dazu zeigt man: Die Schleifeninvariante gilt

- vor dem ersten Schleifendurchlauf
- nach jedem Schleifendurchlauf

⇒ Induktion!

Beispiel

```
//Eingaben :  $a, b \in \mathbb{N}_0$   
 $S \leftarrow a$   
 $Y \leftarrow b$   
for  $i \leftarrow 0$  to  $b - 1$  do  
     $S \leftarrow S + 1$   
     $Y \leftarrow Y - 1$   
od
```

Was macht der Algorithmus?

Welche Schleifeninvariante hat der Algorithmus?

Beweisidee

Vermutung:

Schleifeninvariante

$$S + Y = a + b$$

- Wie widerlegt man sowas?
Indem man zeigt, dass es für einen bestimmten Fall nicht gilt.
- Wie beweist man sowas?
Induktion!

Korrektheitsbeweis

Induktionsanfang: Vor der ersten Schleifenausführung:

$$S_0 = a, Y_0 = b \Rightarrow S_0 + Y_0 = a + b \checkmark$$

Induktionsvoraussetzung: Für ein beliebiges aber festes $i \in \mathbb{N}_0$
gelte: $S_i + Y_i = a + b$

Induktionsschluss: Wir zeigen, dass dann auch

$$S_{i+1} + Y_{i+1} = a + b \text{ gelten muss.}$$

$$S_{i+1} + Y_{i+1} = S_i + 1 + Y_i - 1 = S_i + Y_i + 1 - 1 = S_i + Y_i$$

$$\text{Nach IV: } = a + b \square$$

Überlegung: Schleife wird b mal ausgeführt, Y_i wird jedes mal um eins verringert. Am Ende gilt aber immer noch $S_i + Y_i = a + b$, also ist $S_i = a + b$.

Aufgabe 3.2 von 2008

//Eingaben : $a, b \in \mathbb{N}_+$ $X_0 \leftarrow a$ $Y_0 \leftarrow b$ $P_0 \leftarrow 1$ $x_0 \leftarrow X_0 \bmod 2$ $n \leftarrow 1 + \lceil \log_2 a \rceil$ **for** $i \leftarrow 0$ **to** $n - 1$ **do** $P_{i+1} \leftarrow P_i \cdot Y_i^{x_i}$ $X_{i+1} \leftarrow X_i \mathbf{div} 2$ $Y_{i+1} \leftarrow Y_i^2$ $x_{i+1} \leftarrow X_{i+1} \bmod 2$ **od**

- Welchen Wert hat am Ende P_n ?
- Gib eine sinnvolle Schleifeninvariante an.
- Beweise beides.

Aufgabe 3.2 von 2008

Was macht der Algorithmus mit Eingabe $a = 4, b = 2$?

i	P_i	X_i	Y_i	x_i
0	1	4	2	0
1	1	2	4	0
2	1	1	16	1
3	16	0	256	0
4	16	0	256^2	0

Vermutung Schleifeninvariante

$$P \cdot Y^X = b^a$$

Beweis Schleifeninvariante

Induktionsanfang: Vor der ersten Schleifenausführung:

$$P_0 = 1, Y_0 = b, X_0 = a \Rightarrow P_0 \cdot Y_0^{X_0} = b^a \quad \checkmark$$

Induktionsvoraussetzung: Für ein beliebiges aber festes $i \in \mathbb{N}_0$
gelte: $P_i \cdot Y_i^{X_i} = b^a$

Induktionsschluss: Wir zeigen, dass dann auch $P_{i+1} \cdot Y_{i+1}^{X_{i+1}} = b^a$
gelten muss.

$$\begin{aligned} P_{i+1} \cdot Y_{i+1}^{X_{i+1}} &= (P_i \cdot Y_i^{X_i}) \cdot Y_{i+1}^{X_{i+1}} = \\ &= (P_i \cdot Y_i^{X_i}) \cdot Y_i^{2(X_i \text{ div } 2)} = P_i \cdot Y_i^{X_i + 2(X_i \text{ div } 2)} = \\ &= P_i \cdot Y_i^{(X_i \bmod 2) + 2(X_i \text{ div } 2)} = P_i \cdot Y_i^{X_i} = b^a \quad \square \end{aligned}$$

Wert von P_n

Jeder Schritt halbiert X_i . Daher gilt $\forall i \in \mathbb{N}_0 : X_i \leq a \mathbf{div} 2^i$.

Es gilt $2^{\lceil \log_2 a \rceil} \geq a$. Also auch $X_{\lceil \log_2 a \rceil} \leq a \mathbf{div} 2^{\lceil \log_2 a \rceil} < 1$ und somit $X_{n-1} = X_{\lceil \log_2 a \rceil} = 0$.

Da $0 \mathbf{div} 2 = 0$, gilt $X_n = X_{n-1}$.

Schleifeninvariante gilt auch nach n-tem Durchlauf.

Also ist $P_n \cdot Y_n^{X_n} = P_n \cdot Y_n^0 = P_n = b^a \square$

Aufgabe 3.1 von 2008

Siehe <http://gbi08.ira.uka.de/uebung>

- 1 **Algorithmen**
 - div und mod
 - Informeller Algorithmusbegriff
 - Schleifeninvariante
 - Aufgabe
 - Aufgabe 3.2 von 2008
 - Aufgabe 3.1 von 2008

