Grundbegriffe der Informatik

Tutorium 1 - 6. Sitzung

Dennis Felsing

dennis.felsing@student.kit.edu
http://www.stud.uni-karlsruhe.de/~ubcqr/2010w/tut_gbi/

2010-11-29

Karlsruhe Institute of Technology

Überblick

Relationen

Definitionen

Seien $R \subseteq M_1 \times M_2$ und $S \subseteq M_2 \times M_3$.

Produkt $S \circ R = \{(x, z) \in M_1 \times M_3 \mid \exists y \in M_2 : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$

assoziativ: $(R \circ S) \circ T =$

Relationen

Definitionen

Seien $R \subseteq M_1 \times M_2$ und $S \subseteq M_2 \times M_3$.

Produkt $S \circ R = \{(x, z) \in M_1 \times M_3 \mid \exists y \in M_2 : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$
assoziativ: $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$

Relationen

Definitionen

Seien $R \subseteq M_1 \times M_2$ und $S \subseteq M_2 \times M_3$.

Produkt $S \circ R = \{(x,z) \in M_1 \times M_3 \mid \exists y \in M_2 : (x,y) \in R \wedge (y,z) \in S\}$
assoziativ: $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$

Beispiel

$R = \{(1,2),(1,3),(2,1)\}, S = \{(1,1),(2,3),(3,1)\}$

Relationen

Definitionen

Seien $R \subseteq M_1 \times M_2$ und $S \subseteq M_2 \times M_3$.

Produkt $S \circ R = \{(x, z) \in M_1 \times M_3 \mid \exists y \in M_2 : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$

assoziativ: $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$

Beispiel

$R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1)\}, S = \{(1, 1), (2, 3), (3, 1)\}$

$S \circ R =$

Relationen

Definitionen

Seien $R \subseteq M_1 \times M_2$ und $S \subseteq M_2 \times M_3$.

Produkt $S \circ R = \{(x,z) \in M_1 \times M_3 \mid \exists y \in M_2 : (x,y) \in R \wedge (y,z) \in S\}$
assoziativ: $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$

Beispiel

$R = \{(1,2),(1,3),(2,1)\}, S = \{(1,1),(2,3),(3,1)\}$
$S \circ R = \{(1,3),(1,1),(2,1)\}$

Relationen

Definitionen

Seien $R \subseteq M_1 \times M_2$ und $S \subseteq M_2 \times M_3$.

Produkt $S \circ R = \{(x,z) \in M_1 \times M_3 \mid \exists y \in M_2 : (x,y) \in R \wedge (y,z) \in S\}$
assoziativ: $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$

Beispiel

$R = \{(1,2),(1,3),(2,1)\}, S = \{(1,1),(2,3),(3,1)\}$
$S \circ R = \{(1,3),(1,1),(2,1)\}$
$R \circ S =$

Relationen

Definitionen

Seien $R \subseteq M_1 \times M_2$ und $S \subseteq M_2 \times M_3$.

Produkt $S \circ R = \{(x, z) \in M_1 \times M_3 \mid \exists y \in M_2 : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$

assoziativ: $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$

Beispiel

$R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1)\}, S = \{(1, 1), (2, 3), (3, 1)\}$
$S \circ R = \{(1, 3), (1, 1), (2, 1)\}$
$R \circ S = \{(1, 2), (1, 3), (3, 2), (3, 3)\}$

Relationen

Definitionen

Seien $R \subseteq M_1 \times M_2$ und $S \subseteq M_2 \times M_3$.

Produkt $S \circ R = \{(x,z) \in M_1 \times M_3 \mid \exists y \in M_2 : (x,y) \in R \wedge (y,z) \in S\}$
assoziativ: $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$

Beispiel

$R = \{(1,2),(1,3),(2,1)\}, S = \{(1,1),(2,3),(3,1)\}$
$S \circ R = \{(1,3),(1,1),(2,1)\}$
$R \circ S = \{(1,2),(1,3),(3,2),(3,3)\}$

Achtung

Reihenfolge spielt eine Rolle!

Relationen

Definitionen

Seien $R \subseteq M_1 \times M_2$ und $S \subseteq M_2 \times M_3$.

Produkt $S \circ R = \{(x, z) \in M_1 \times M_3 \mid \exists y \in M_2 : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$

assoziativ: $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$

Relationen

Definitionen

Seien $R \subseteq M_1 \times M_2$ und $S \subseteq M_2 \times M_3$.

Produkt $S \circ R = \{(x, z) \in M_1 \times M_3 \mid \exists y \in M_2 : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$
assoziativ: $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$

Beispiel Verwandschaft

$xRy \Leftrightarrow$ x ist Elternteil von y
$xSy \Leftrightarrow$ x ist verheiratet mit y

Relationen

Definitionen

Seien $R \subseteq M_1 \times M_2$ und $S \subseteq M_2 \times M_3$.

Produkt $S \circ R = \{(x, z) \in M_1 \times M_3 \mid \exists y \in M_2 : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$
assoziativ: $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$

Beispiel Verwandschaft

$xRy \Leftrightarrow$ x ist Elternteil von y
$xSy \Leftrightarrow$ x ist verheiratet mit y
$x(S \circ R)y \Leftrightarrow$

Relationen

Definitionen

Seien $R \subseteq M_1 \times M_2$ und $S \subseteq M_2 \times M_3$.

Produkt $S \circ R = \{(x, z) \in M_1 \times M_3 \mid \exists y \in M_2 : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$

assoziativ: $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$

Beispiel Verwandschaft

$xRy \Leftrightarrow$ x ist Elternteil von y

$xSy \Leftrightarrow$ x ist verheiratet mit y

$x(S \circ R)y \Leftrightarrow$ x ist Schwiegermutter/-vater von y

Relationen

Definitionen

Seien $R \subseteq M_1 \times M_2$ und $S \subseteq M_2 \times M_3$.

Produkt $S \circ R = \{(x, z) \in M_1 \times M_3 \mid \exists y \in M_2 : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$

assoziativ: $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$

Beispiel Verwandschaft

$xRy \Leftrightarrow$ x ist Elternteil von y

$xSy \Leftrightarrow$ x ist verheiratet mit y

$x(S \circ R)y \Leftrightarrow$ x ist Schwiegermutter/-vater von y

$x(R \circ S)y \Leftrightarrow$

Relationen

Definitionen

Seien $R \subseteq M_1 \times M_2$ und $S \subseteq M_2 \times M_3$.

Produkt $S \circ R = \{(x,z) \in M_1 \times M_3 \mid \exists y \in M_2 : (x,y) \in R \wedge (y,z) \in S\}$
assoziativ: $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$

Beispiel Verwandschaft

$xRy \Leftrightarrow$ x ist Elternteil von y
$xSy \Leftrightarrow$ x ist verheiratet mit y
$x(S \circ R)y \Leftrightarrow$ x ist Schwiegermutter/-vater von y
$x(R \circ S)y \Leftrightarrow$ x ist Ehepartner des Elternteils von y

Relationen

Definitionen

Seien $R \subseteq M_1 \times M_2$ und $S \subseteq M_2 \times M_3$.

Produkt $S \circ R = \{(x,z) \in M_1 \times M_3 \mid \exists y \in M_2 : (x,y) \in R \wedge (y,z) \in S\}$

assoziativ: $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$

Beispiel Verwandschaft

$xRy \Leftrightarrow$ x ist Elternteil von y

$xSy \Leftrightarrow$ x ist verheiratet mit y

$x(S \circ R)y \Leftrightarrow$ x ist Schwiegermutter/-vater von y

$x(R \circ S)y \Leftrightarrow$ x ist Ehepartner des Elternteils von y

Beispiel Funktion

$f(x) = 3x, g(x) = x + 1,$

Relationen

Definitionen

Seien $R \subseteq M_1 \times M_2$ und $S \subseteq M_2 \times M_3$.

Produkt $S \circ R = \{(x,z) \in M_1 \times M_3 \mid \exists y \in M_2 : (x,y) \in R \wedge (y,z) \in S\}$
assoziativ: $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$

Beispiel Verwandschaft

$xRy \Leftrightarrow$ x ist Elternteil von y
$xSy \Leftrightarrow$ x ist verheiratet mit y
$x(S \circ R)y \Leftrightarrow$ x ist Schwiegermutter/-vater von y
$x(R \circ S)y \Leftrightarrow$ x ist Ehepartner des Elternteils von y

Beispiel Funktion

$f(x) = 3x, g(x) = x + 1, (f \circ g)(x) =$

Relationen

Definitionen

Seien $R \subseteq M_1 \times M_2$ und $S \subseteq M_2 \times M_3$.

Produkt $S \circ R = \{(x, z) \in M_1 \times M_3 \mid \exists y \in M_2 : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$
assoziativ: $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$

Beispiel Verwandschaft

$xRy \Leftrightarrow$ x ist Elternteil von y
$xSy \Leftrightarrow$ x ist verheiratet mit y
$x(S \circ R)y \Leftrightarrow$ x ist Schwiegermutter/-vater von y
$x(R \circ S)y \Leftrightarrow$ x ist Ehepartner des Elternteils von y

Beispiel Funktion

$f(x) = 3x, g(x) = x + 1, (f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3(x + 1)$

Relationen

Definitionen

Produkt $S \circ R = \{(x, z) \in M_1 \times M_3 \mid \exists y \in M_2 : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$

assoziativ: $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$

Identität $I_M = \{(x, x) \mid x \in M\}$

Relationen

Definitionen

Produkt $S \circ R = \{(x, z) \in M_1 \times M_3 \mid \exists y \in M_2 : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$

assoziativ: $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$

Identität $I_M = \{(x, x) \mid x \in M\}$

$R \circ I_M =$

Relationen

Definitionen

Produkt $S \circ R = \{(x,z) \in M_1 \times M_3 \mid \exists y \in M_2 : (x,y) \in R \wedge (y,z) \in S\}$

assoziativ: $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$

Identität $I_M = \{(x,x) \mid x \in M\}$

$R \circ I_M = R$

$I_M \circ R =$

Relationen

Definitionen

Produkt $S \circ R = \{(x, z) \in M_1 \times M_3 \mid \exists y \in M_2 : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$

assoziativ: $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$

Identität $I_M = \{(x, x) \mid x \in M\}$

$R \circ I_M = R$

$I_M \circ R = R$

Relationen

Definitionen

Produkt $S \circ R = \{(x,z) \in M_1 \times M_3 \mid \exists y \in M_2 : (x,y) \in R \wedge (y,z) \in S\}$

assoziativ: $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$

Identität $I_M = \{(x,x) \mid x \in M\}$

$R \circ I_M = R$

$I_M \circ R = R$

Potenz $R^0 = I_M$

$\forall i \in \mathbb{N}_0 : R^{i+1} = R \circ R^i$

Relationen

Definitionen

Produkt $S \circ R = \{(x,z) \in M_1 \times M_3 \mid \exists y \in M_2 : (x,y) \in R \wedge (y,z) \in S\}$

assoziativ: $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$

Identität $I_M = \{(x,x) \mid x \in M\}$

$R \circ I_M = R$

$I_M \circ R = R$

Potenz $R^0 = I_M$

$\forall i \in \mathbb{N}_0 : R^{i+1} = R \circ R^i$

Reflexiv-transitive Hülle $R^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} R^i$

Kleinste Relation, die R enthält und reflexiv und transitiv ist.

Reflexivität und Transitivität

Definitionen

Reflexiv : $I_M \subseteq R$

Transitiv : $\forall x, y, z \in M : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

Beispiele

- Gleichheitsrelation $R_= \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist

Reflexivität und Transitivität

Definitionen

Reflexiv : $I_M \subseteq R$

Transitiv : $\forall x, y, z \in M : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

Beispiele

- Gleichheitsrelation $R_= \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist reflexiv und transitiv.

Reflexivität und Transitivität

Definitionen

Reflexiv : $I_M \subseteq R$

Transitiv : $\forall x, y, z \in M : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

Beispiele

- Gleichheitsrelation $R_= \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist reflexiv und transitiv.
- $\{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c), (c, c)\} \subseteq \{a, b, c\} \times \{a, b, c\}$ ist

Reflexivität und Transitivität

Definitionen

Reflexiv : $I_M \subseteq R$

Transitiv : $\forall x, y, z \in M : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

Beispiele

- Gleichheitsrelation $R_= \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist reflexiv und transitiv.
- $\{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c), (c, c)\} \subseteq \{a, b, c\} \times \{a, b, c\}$ ist reflexiv und nicht transitiv.

Reflexivität und Transitivität

Definitionen

Reflexiv : $I_M \subseteq R$

Transitiv : $\forall x, y, z \in M : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

Beispiele

- Gleichheitsrelation $R_= \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist reflexiv und transitiv.
- $\{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c), (c, c)\} \subseteq \{a, b, c\} \times \{a, b, c\}$ ist reflexiv und nicht transitiv.
- $R_\leq \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist

Reflexivität und Transitivität

Definitionen

Reflexiv : $I_M \subseteq R$

Transitiv : $\forall x, y, z \in M : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

Beispiele

- Gleichheitsrelation $R_= \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist reflexiv und transitiv.
- $\{(a,a),(a,b),(b,b),(b,c),(c,c)\} \subseteq \{a,b,c\} \times \{a,b,c\}$ ist reflexiv und nicht transitiv.
- $R_\leq \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist reflexiv und transitiv.

Reflexivität und Transitivität

Definitionen

Reflexiv : $I_M \subseteq R$

Transitiv : $\forall x, y, z \in M : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

Beispiele

- Gleichheitsrelation $R_= \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist reflexiv und transitiv.
- $\{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c), (c, c)\} \subseteq \{a, b, c\} \times \{a, b, c\}$ ist reflexiv und nicht transitiv.
- $R_\leq \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist reflexiv und transitiv.
- $R_< \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist

Reflexivität und Transitivität

Definitionen

Reflexiv : $I_M \subseteq R$

Transitiv : $\forall x, y, z \in M : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

Beispiele

- Gleichheitsrelation $R_= \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist reflexiv und transitiv.
- $\{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c), (c, c)\} \subseteq \{a, b, c\} \times \{a, b, c\}$ ist reflexiv und nicht transitiv.
- $R_\leq \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist reflexiv und transitiv.
- $R_< \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist transitiv und nicht reflexiv.

Reflexivität und Transitivität

Definitionen

Reflexiv : $I_M \subseteq R$

Transitiv : $\forall x, y, z \in M : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

Beispiele

- Gleichheitsrelation $R_= \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist reflexiv und transitiv.
- $\{(a,a),(a,b),(b,b),(b,c),(c,c)\} \subseteq \{a,b,c\} \times \{a,b,c\}$ ist reflexiv und nicht transitiv.
- $R_\leq \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist reflexiv und transitiv.
- $R_< \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist transitiv und nicht reflexiv.
- $xVy \Leftrightarrow$ x ist Vorfahre von y. V ist

Reflexivität und Transitivität

Definitionen

Reflexiv : $I_M \subseteq R$

Transitiv : $\forall x, y, z \in M : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

Beispiele

- Gleichheitsrelation $R_= \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist reflexiv und transitiv.
- $\{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c), (c, c)\} \subseteq \{a, b, c\} \times \{a, b, c\}$ ist reflexiv und nicht transitiv.
- $R_\leq \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist reflexiv und transitiv.
- $R_< \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist transitiv und nicht reflexiv.
- $xVy \Leftrightarrow$ x ist Vorfahre von y. V ist transitiv und nicht reflexiv.

Reflexivität und Transitivität

Definitionen

Reflexiv : $I_M \subseteq R$

Transitiv : $\forall x, y, z \in M : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

Beispiele

- Gleichheitsrelation $R_= \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist reflexiv und transitiv.
- $\{(a,a),(a,b),(b,b),(b,c),(c,c)\} \subseteq \{a,b,c\} \times \{a,b,c\}$ ist reflexiv und nicht transitiv.
- $R_\leq \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist reflexiv und transitiv.
- $R_< \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist transitiv und nicht reflexiv.
- $xVy \Leftrightarrow$ x ist Vorfahre von y. V ist transitiv und nicht reflexiv.
- $x\heartsuit y \Leftrightarrow$ x liebt y. $\heartsuit$ ist

Reflexivität und Transitivität

Definitionen

Reflexiv : $I_M \subseteq R$

Transitiv : $\forall x, y, z \in M : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

Beispiele

- Gleichheitsrelation $R_= \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist reflexiv und transitiv.
- $\{(a,a),(a,b),(b,b),(b,c),(c,c)\} \subseteq \{a,b,c\} \times \{a,b,c\}$ ist reflexiv und nicht transitiv.
- $R_\leq \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist reflexiv und transitiv.
- $R_< \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist transitiv und nicht reflexiv.
- $xVy \Leftrightarrow$ x ist Vorfahre von y. V ist transitiv und nicht reflexiv.
- $x\heartsuit y \Leftrightarrow$ x liebt y. $\heartsuit$ ist nicht transitiv und nicht reflexiv.

Reflexivität und Transitivität

Definitionen

Reflexiv : $I_M \subseteq R$

Transitiv : $\forall x, y, z \in M : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

Beispiele

- Gleichheitsrelation $R_= \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist reflexiv und transitiv.
- $\{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c), (c, c)\} \subseteq \{a, b, c\} \times \{a, b, c\}$ ist reflexiv und nicht transitiv.
- $R_\leq \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist reflexiv und transitiv.
- $R_< \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist transitiv und nicht reflexiv.
- $xVy \Leftrightarrow$ x ist Vorfahre von y. V ist transitiv und nicht reflexiv.
- $x\heartsuit y \Leftrightarrow$ x liebt y. $\heartsuit$ ist nicht transitiv und nicht reflexiv.
- $R \subseteq \{\} \times \{\}$ ist

Reflexivität und Transitivität

Definitionen

Reflexiv : $I_M \subseteq R$

Transitiv : $\forall x, y, z \in M : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

Beispiele

- Gleichheitsrelation $R_= \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist reflexiv und transitiv.
- $\{(a,a),(a,b),(b,b),(b,c),(c,c)\} \subseteq \{a,b,c\} \times \{a,b,c\}$ ist reflexiv und nicht transitiv.
- $R_\leq \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist reflexiv und transitiv.
- $R_< \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist transitiv und nicht reflexiv.
- $xVy \Leftrightarrow$ x ist Vorfahre von y. V ist transitiv und nicht reflexiv.
- $x\heartsuit y \Leftrightarrow$ x liebt y. $\heartsuit$ ist nicht transitiv und nicht reflexiv.
- $R \subseteq \{\} \times \{\}$ ist transitiv und reflexiv.

Aufgabe

Seien $R \subseteq M \times M$ eine beliebige Relation
und $S \subseteq M \times M$ eine reflexive und transitive Relation.
Behauptung: $R \subseteq S \Rightarrow R^* \subseteq S$
Beweis:

Aufgabe

Seien $R \subseteq M \times M$ eine beliebige Relation
und $S \subseteq M \times M$ eine reflexive und transitive Relation.
Behauptung: $R \subseteq S \Rightarrow R^* \subseteq S$
Beweis: **Vollständige Induktion**: $\forall i \in \mathbb{N}_0 : R \subseteq S \Rightarrow R^i \subseteq S$

Aufgabe

Seien $R \subseteq M \times M$ eine beliebige Relation
und $S \subseteq M \times M$ eine reflexive und transitive Relation.
Behauptung: $R \subseteq S \Rightarrow R^* \subseteq S$
Beweis: **Vollständige Induktion**: $\forall i \in \mathbb{N}_0 : R \subseteq S \Rightarrow R^i \subseteq S$

Induktionsanfang : $i = 0$: $R^0 = I_M$. Da S reflexiv ist, gilt $I_M \subseteq S$
und somit $R^0 \subseteq S$.

Aufgabe

Seien $R \subseteq M \times M$ eine beliebige Relation
und $S \subseteq M \times M$ eine reflexive und transitive Relation.
Behauptung: $R \subseteq S \Rightarrow R^* \subseteq S$
Beweis: **Vollständige Induktion**: $\forall i \in \mathbb{N}_0 : R \subseteq S \Rightarrow R^i \subseteq S$

Induktionsanfang : $i = 0$: $R^0 = I_M$. Da S reflexiv ist, gilt $I_M \subseteq S$ und somit $R^0 \subseteq S$.

Induktionsvoraussetzung : Für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}_0$ gelte $R \subseteq S \Rightarrow R^n \subseteq S$.

Aufgabe

Seien $R \subseteq M \times M$ eine beliebige Relation
und $S \subseteq M \times M$ eine reflexive und transitive Relation.
Behauptung: $R \subseteq S \Rightarrow R^* \subseteq S$
Beweis: **Vollständige Induktion**: $\forall i \in \mathbb{N}_0 : R \subseteq S \Rightarrow R^i \subseteq S$

Induktionsanfang : $i = 0$: $R^0 = I_M$. Da S reflexiv ist, gilt $I_M \subseteq S$ und somit $R^0 \subseteq S$.

Induktionsvoraussetzung : Für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}_0$ gelte $R \subseteq S \Rightarrow R^n \subseteq S$.

Induktionsschluss : $n \rightsquigarrow n+1$: $R^{n+1} = R \circ R^n$.
Nach IV gilt $R^n \subseteq S$, also ist $R \circ R^n \subseteq R \circ S$. Nach Annahme gilt $R \subseteq S$. Somit ist $R \circ S \subseteq S \circ S$. (Ausführlicher auf Ü-Blatt 6.1 b) Da S transitiv ist, gilt $S \circ S = S$ $\square$

Überblick

1. Relationen
2. **Codierungen**
   - Dezimaldarstellung von Zahlen
   - Andere Zahldarstellungen
   - Aufgabe Algorithmus
   - Übersetzungen
   - Homomorphismen

Codierungen

Definition

Dezimaldarstellung von Zahlen

$$Num_{10}(\varepsilon) = 0$$
$$\forall w \in Z_{10}^{*} \forall x \in Z_{10} : Num_{10}(wx) = 10 \cdot Num_{10}(w) + num_{10}(x)$$

Codierungen

Definition

Dezimaldarstellung von Zahlen

$$Num_{10}(\varepsilon) = 0$$
$$\forall w \in Z_{10}^* \forall x \in Z_{10} : Num_{10}(wx) = 10 \cdot Num_{10}(w) + num_{10}(x)$$

Beispiel

$$Num_{10}(479) = \ldots = 10 \cdot (10 \cdot (10 \cdot Num_{10}(\varepsilon) + 4) + 7) + 9 = 479$$

Wohldefiniertheit von Num_{10}

Behauptung

Num_{10} ist wohldefiniert, das heißt für jedes Wort $w \in Z^*$ wird eindeutig der Funktionswert Num_{10} festegelegt.

Wohldefiniertheit von Num_{10}

Behauptung

Num_{10} ist wohldefiniert, das heißt für jedes Wort $w \in Z^*$ wird eindeutig der Funktionswert Num_{10} festegelegt.

Beweis

Vollständige Induktion über Wortlänge n:

Wohldefiniertheit von Num_{10}

Behauptung

Num_{10} ist wohldefiniert, das heißt für jedes Wort $w \in Z^*$ wird eindeutig der Funktionswert Num_{10} festegelegt.

Beweis

Vollständige Induktion über Wortlänge n:

Induktionsanfang : $n = 0$: $|w| = 0$, also $w = \varepsilon$. Nach Definition gilt $Num_{10}(\varepsilon) = 0$. Andere Werte für $Num_{10}(\varepsilon)$ existieren nicht, da $Num_{10}(wx)$ ein wx der Länge ≥ 1 verlangt.

Wohldefiniertheit von Num_{10}

Behauptung

Num_{10} ist wohldefiniert, das heißt für jedes Wort $w \in Z^*$ wird eindeutig der Funktionswert Num_{10} festegelegt.

Beweis

Vollständige Induktion über Wortlänge n:

Induktionsanfang : $n = 0$: $|w| = 0$, also $w = \varepsilon$. Nach Definition gilt $Num_{10}(\varepsilon) = 0$. Andere Werte für $Num_{10}(\varepsilon)$ existieren nicht, da $Num_{10}(wx)$ ein wx der Länge $\geq$ 1 verlangt.

Induktionsvoraussetzung : Für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}_0$ gelte: Für alle Wörter $w \in Z^n$ ist $Num_{10}(w)$ eindeutig definiert.

Wohldefiniertheit von Num_{10}

Beweis (fortgesetzt)

Induktionsschluss : $n \rightsquigarrow n+1$: Sei w' ein beliebiges Wort mit $|w'| = n+1$. w' lässt sich schreiben als $w' = wx$ mit $w \in Z^n$ und $x \in Z$.
In der Definition von Num_{10} passt nur die zweite Gleichung: $Num_{10}(w') = Num_{10}(wx) = 10 \cdot Num_{10}(w) + num_{10}(x)$.
Nach IV ist $Num_{10}(w)$ eindeutig festgelegt, also auch $Num_{10}(w')$. $\square$

Andere Zahldarstellungen

Definition

Wie allgemeine Umwandlung bei Basis k?

Andere Zahldarstellungen

Definition

Wie allgemeine Umwandlung bei Basis k?

$$Num_k(\varepsilon) = 0$$

$$\forall w \in Z_k^* \forall x \in Z_k : Num_k(wx) = k \cdot Num_k(w) + num_k(x)$$

Andere Zahldarstellungen

Definition

Wie allgemeine Umwandlung bei Basis k?

$$Num_k(\varepsilon) = 0$$
$$\forall w \in Z_k^* \forall x \in Z_k : Num_k(wx) = k \cdot Num_k(w) + num_k(x)$$

Beispiele

$Num_3(111) = ... = 13$

Andere Zahldarstellungen

Definition

Wie allgemeine Umwandlung bei Basis k?

$$Num_k(\varepsilon) = 0$$
$$\forall w \in Z_k^* \forall x \in Z_k : Num_k(wx) = k \cdot Num_k(w) + num_k(x)$$

Beispiele

$Num_3(111) = ... = 13$
$Num_2(1) = 1,\ Num_2(11) = 3,\ Num_2(111) = 7,\ Num_2(1111) = 15$
Allgemeiner:

Andere Zahldarstellungen

Definition

Wie allgemeine Umwandlung bei Basis k?

$$Num_k(\varepsilon) = 0$$
$$\forall w \in Z_k^* \forall x \in Z_k : Num_k(wx) = k \cdot Num_k(w) + num_k(x)$$

Beispiele

$Num_3(111) = \ldots = 13$
$Num_2(1) = 1,\ Num_2(11) = 3,\ Num_2(111) = 7,\ Num_2(1111) = 15$
Allgemeiner: $\forall m \in \mathbb{N}_0 : Num_2(1^m) = 2^m - 1$
Für Basis $k = 3$:

Andere Zahldarstellungen

Definition

Wie allgemeine Umwandlung bei Basis k?

$$Num_k(\varepsilon) = 0$$

$$\forall w \in Z_k^* \forall x \in Z_k : Num_k(wx) = k \cdot Num_k(w) + num_k(x)$$

Beispiele

$Num_3(111) = \dots = 13$

$Num_2(1) = 1,\ Num_2(11) = 3,\ Num_2(111) = 7,\ Num_2(1111) = 15$

Allgemeiner: $\forall m \in \mathbb{N}_0 : Num_2(1^m) = 2^m - 1$

Für Basis $k = 3$: $\forall m \in \mathbb{N}_0 : Num_3(2^m) = 3^m - 1$

Aufgabe Algorithmus

Gib einen Algorithmus an, der eine Binärdarstellung zu einer Zahl umwandelt.

Aufgabe Algorithmus

Gib einen Algorithmus an, der eine Binärdarstellung zu einer Zahl umwandelt.

$$
\begin{array}{l}
//\text{Eingabe}: w \in Z_2^* \\
x \leftarrow 0 \\
v \leftarrow \varepsilon \\
\textbf{for } i \leftarrow 0 \textbf{ to } |w| - 1 \textbf{ do} \\
\qquad v \leftarrow v \cdot w(i) \\
\qquad x \leftarrow 2x + num_2(w(i)) \\
\textbf{od} \\
//\text{am Ende: } v = w \wedge x = Num_2(w)
\end{array}
$$

Aufgabe Algorithmus

Gib einen Algorithmus an, der eine Binärdarstellung zu einer Zahl umwandelt.

$$
\begin{array}{l}
//\text{Eingabe} : w \in Z_2^* \\
x \leftarrow 0 \\
v \leftarrow \varepsilon \\
\textbf{for } i \leftarrow 0 \textbf{ to } |w| - 1 \textbf{ do} \\
\qquad v \leftarrow v \cdot w(i) \\
\qquad x \leftarrow 2x + num_2(w(i)) \\
\textbf{od} \\
//\text{am Ende: } v = w \wedge x = Num_2(w)
\end{array}
$$

Wie lautet eine sinnvolle Schleifeninvariante?

Aufgabe Algorithmus

Gib einen Algorithmus an, der eine Binärdarstellung zu einer Zahl umwandelt.

$$
\begin{aligned}
&//\text{Eingabe}: w \in Z_2^*\\
&x \leftarrow 0\\
&v \leftarrow \varepsilon\\
&\textbf{for } i \leftarrow 0 \textbf{ to } |w|-1 \textbf{ do}\\
&\qquad v \leftarrow v \cdot w(i)\\
&\qquad x \leftarrow 2x + num_2(w(i))\\
&\textbf{od}\\
&//\text{am Ende: } v = w \wedge x = Num_2(w)
\end{aligned}
$$

Wie lautet eine sinnvolle Schleifeninvariante? $x = Num_2(v)$

Übersetzungen

Definition

Seien A und B Alphabete und $sem_A : L_A \to Sem$ und $sem_B : L_B \to Sem$ Abbildungen von formalen Sprachen $L_A \subseteq A^*$ und $L_B \subseteq B^*$ in die Menge Sem von Bedeutungen.
Eine Abbildung $f : L_A \to L_B$ heißt **Übersetzung** bezüglich sem_A und sem_B, wenn f **die Bedeutung erhält**, d.h.
$\forall w \in L_A : sem_A(w) = sem_B(f(w))$.

Übersetzungen

Definition

Seien A und B Alphabete und $sem_A : L_A \to Sem$ und $sem_B : L_B \to Sem$ Abbildungen von formalen Sprachen $L_A \subseteq A^*$ und $L_B \subseteq B^*$ in die Menge Sem von Bedeutungen.
Eine Abbildung $f : L_A \to L_B$ heißt **Übersetzung** bezüglich sem_A und sem_B, wenn f **die Bedeutung erhält**, d.h.
$\forall w \in L_A : sem_A(w) = sem_B(f(w))$.
Wenn f injektiv ist, heißt es **Codierung**. Für $w \in L_A$ heißt $f(w)$ dann ein **Codewort** und die Menge $\{f(w) \mid w \in L_A\}$ aller Codewörter heißt **Code**.

Übersetzungen

Warum macht man Übersetzungen?

Übersetzungen

Warum macht man Übersetzungen?

- Lesbarkeit

Übersetzungen

Warum macht man Übersetzungen?

- Lesbarkeit
- Kompression

Übersetzungen

Warum macht man Übersetzungen?

- Lesbarkeit
- Kompression
- Verschlüsselung

Übersetzungen

Warum macht man Übersetzungen?

- Lesbarkeit
- Kompression
- Verschlüsselung
- Fehlererkennung und Fehlerkorrektur

Homomorphismen

Definition

Seien A, B Alphabete und $h : A \to B^*$ eine Abbildung. Ein **Homomorphismus** $h^{**} : A^* \to B^*$ mit:

$$h^{**}(\varepsilon) = \varepsilon$$

$$\forall w \in A^* \forall x \in A : h^{**}(wx) = h^{**}(w)h(x)$$

Häufig schreibt man h statt h^{**}.

Homomorphismen

Definition

Seien A, B Alphabete und $h : A \to B^*$ eine Abbildung. Ein **Homomorphismus** $h^{**} : A^* \to B^*$ mit:

$$h^{**}(\varepsilon) = \varepsilon$$
$$\forall w \in A^* \forall x \in A : h^{**}(wx) = h^{**}(w)h(x)$$

Häufig schreibt man h statt h^{**}.

Beispiel

$h(a) = 001$ und $h(b) = 1101$
$h^{**}(bba) = h(bba) = h(b)h(b)h(a) = 1101 \cdot 1101 \cdot 001 = 11011101001$

Homomorphismen

Definitionen

Ein Homomorphismus heißt ε-frei, wenn für alle $x \in A$ gilt: $h(x) \neq \varepsilon$.

Was bringt ε-Freiheit?

Homomorphismen

Definitionen

Ein Homomorphismus heißt ε-frei, wenn für alle $x \in A$ gilt: $h(x) \neq \varepsilon$.

Was bringt ε-Freiheit?
Sonst gehen „Informationen verloren".

Homomorphismen

Definitionen

Ein Homomorphismus heißt ε-frei, wenn für alle $x \in A$ gilt: $h(x) \neq \varepsilon$.

Was bringt ε-Freiheit?
Sonst gehen „Informationen verloren“.

Beispiel

$h(\mathtt{a}) = \mathtt{001}$ und $h(\mathtt{b}) = \varepsilon$
$h(w) = \mathtt{001}$. Was war w?

Homomorphismen

Definitionen

Ein Homomorphismus heißt ε-frei, wenn für alle $x \in A$ gilt: $h(x) \neq \varepsilon$.

Was bringt ε-Freiheit?
Sonst gehen „Informationen verloren“.

Beispiel

$h(\mathtt{a}) = \mathtt{001}$ und $h(\mathtt{b}) = \varepsilon$
$h(w) = \mathtt{001}$. Was war w?
Ein Wort aus $\mathtt{b}^*\mathtt{ab}^*$, genaueres wissen wir nicht. Also ist h nicht injektiv und somit keine Codierung.

Homomorphismen

Information kann auch anders verloren gehen:

Beispiele

- $h(\mathtt{a}) = \mathtt{0}$, $h(\mathtt{b}) = \mathtt{1}$, $h(\mathtt{c}) = \mathtt{10}$
- $h(\mathtt{a}) = h(\mathtt{b})$

Homomorphismen

Information kann auch anders verloren gehen:

Beispiele

- $h(\mathtt{a}) = \mathtt{0}$, $h(\mathtt{b}) = \mathtt{1}$, $h(\mathtt{c}) = \mathtt{10}$
- $h(\mathtt{a}) = h(\mathtt{b})$

Definition

„Information geht verloren“ $\Leftrightarrow$

Homomorphismen

Information kann auch anders verloren gehen:

Beispiele

- $h(\mathtt{a}) = \mathtt{0}$, $h(\mathtt{b}) = \mathtt{1}$, $h(\mathtt{c}) = \mathtt{10}$
- $h(\mathtt{a}) = h(\mathtt{b})$

Definition

„Information geht verloren“ $\Leftrightarrow$ Es gibt Wörter $w_1 \neq w_2$ mit $h^{**}(w_1) = h^{**}(w_2)$.

Homomorphismen

Definition

Präfixfreier Code : für keine zwei verschiedenen Symbole $x_1, x_2 \in A$ gilt: $h(x_1)$ ist Präfix von $h(x_2)$.

Homomorphismen

Definition

Präfixfreier Code : für keine zwei verschiedenen Symbole $x_1, x_2 \in A$ gilt: $h(x_1)$ ist Präfix von $h(x_2)$.

Beispiele

$h(\mathtt{a}) = \mathtt{001}$ und $h(\mathtt{b}) = \mathtt{1101}$ ist

Homomorphismen

Definition

Präfixfreier Code : für keine zwei verschiedenen Symbole $x_1, x_2 \in A$ gilt: $h(x_1)$ ist Präfix von $h(x_2)$.

Beispiele

$h(\texttt{a}) = \texttt{001}$ und $h(\texttt{b}) = \texttt{1101}$ ist präfixfrei.

Homomorphismen

Definition

Präfixfreier Code : für keine zwei verschiedenen Symbole $x_1, x_2 \in A$ gilt: $h(x_1)$ ist Präfix von $h(x_2)$.

Beispiele

$h(\texttt{a}) = \texttt{001}$ und $h(\texttt{b}) = \texttt{1101}$ ist präfixfrei.
$h(\texttt{a}) = \texttt{01}$ und $h(\texttt{b}) = \texttt{011}$ ist

Homomorphismen

Definition

Präfixfreier Code : für keine zwei verschiedenen Symbole $x_1, x_2 \in A$ gilt: $h(x_1)$ ist Präfix von $h(x_2)$.

Beispiele

$h(\texttt{a}) = \texttt{001}$ und $h(\texttt{b}) = \texttt{1101}$ ist präfixfrei.
$h(\texttt{a}) = \texttt{01}$ und $h(\texttt{b}) = \texttt{011}$ ist nicht präfixfrei.

Homomorphismen

Definition

Präfixfreier Code : für keine zwei verschiedenen Symbole $x_1, x_2 \in A$ gilt: $h(x_1)$ ist Präfix von $h(x_2)$.

Beispiele

$h(\texttt{a}) = \texttt{001}$ und $h(\texttt{b}) = \texttt{1101}$ ist präfixfrei.
$h(\texttt{a}) = \texttt{01}$ und $h(\texttt{b}) = \texttt{011}$ ist nicht präfixfrei.
Wenn alle $h(x)$ gleich lang sind: präfixfrei $\Leftrightarrow$

Homomorphismen

Definition

Präfixfreier Code : für keine zwei verschiedenen Symbole $x_1, x_2 \in A$ gilt: $h(x_1)$ ist Präfix von $h(x_2)$.

Beispiele

$h(\mathtt{a}) = \mathtt{001}$ und $h(\mathtt{b}) = \mathtt{1101}$ ist präfixfrei.
$h(\mathtt{a}) = \mathtt{01}$ und $h(\mathtt{b}) = \mathtt{011}$ ist nicht präfixfrei.
Wenn alle $h(x)$ gleich lang sind: präfixfrei $\Leftrightarrow$ h injektiv

Überblick


pbfcomics.com
Deborah. I've found no survivors.
Especially not over there
No. Frank. Not now.
WILL YOU MARRY ME?