

Grundbegriffe der Informatik

Tutorium 1 - 7. Sitzung

Dennis Felsing

dennis.felsing@student.kit.edu

http://www.stud.uni-karlsruhe.de/~ubcqr/2010w/tut_gbi/

2010-12-06



Überblick

1 Huffman-Codierung

- Definition
- Aufgaben
- Blockcodierung

2 Graphen

Huffman-Codierung

Definition

Sei A ein Alphabet und $w \in A^*$.

Eine **Huffman-Codierung** von w ist ein ε -freier Homomorphismus $h : A^* \rightarrow Z_2^*$.

Häufigere Symbole werden durch kürzere Wörter codiert, seltenere Symbole durch längere.

Welchen Nutzen hat das? Kompression.

Aufgaben

$$A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

Jedes Zeichen kommt genau einmal vor

$w = \text{badcfegh}$

- Huffman-Code-Baum erstellen
- Wort codieren
- Wie lang ist die Codierung?

Aufgaben

$$A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

a kommt einmal vor, b zweimal, c 4-mal, ...

$$w_1 = \text{abbcccd}^8 \text{e}^{16} \text{f}^{32} \text{g}^{64} \text{h}^{128} \quad w_2 = \text{badcfegh}$$

- Huffman-Code-Baum für w_1 erstellen
- Wort w_1 codieren
- Wie lang ist die Codierung?
- Wort w_2 codieren
- Wie lang ist die Codierung für w_1 mit Huffman-Code aus erster Aufgabe?

Man kann sich überlegen dass Huffman-Codes unter allen präfixfreien Codes zu den kürzesten Codierungen für das Wort, für das der Code konstruiert wurde, führt.

Blockcodierung

Definition

Verallgemeinerung von Huffman-Codierung:
Teilwörter fester Größe betrachten

Beispiel

$w =$ **aaaaaaaaa****add****cccccccc****bbbbbbbbb**

Wir betrachten Teilwörter der Länge 10. Wie lang ist die Huffman-Codierung von w ? 8

Überblick

1 Huffman-Codierung

2 Graphen

- Gerichtete Graphen
- Beispiele
- Teilgraphen
- Pfade
- Bäume
- Potenzen
- Ungerichtete Graphen
- Äquivalenzrelationen

Gerichtete Graphen

Definitionen

Gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit nichtleerer Knotenmenge V
und Kantenmenge $E \subseteq V \times V$

Knoten $x \in V$

Kante $(x, y) \in E$
 x und y sind **adjazent**

Schlinge $(x, x) \in E$

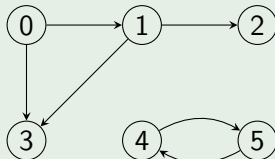
Beispiel

Formale Darstellung:

$$V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$E = \{(0, 1), (0, 3), (1, 2), \\ (1, 3), (4, 5), (5, 4)\}$$

Graphische Darstellung:



Beispiele Graphen und graphische Darstellung

Siehe Tafel.

Eigenschaften von Graphen

Welche Eigenschaften sollte ein Graph haben, der zur Darstellung dient von

- Straßen? Von jedem Knoten kann man zu jedem anderen kommen.
- Rechnern als Knoten und Kabeln als Kanten? Von x nach y über möglichst wenige Kanten laufen und von einer Hälfte in die andere möglichst viele Kanten.

Eigenschaften von Graphen

Wie viele Kanten kann ein Graph mit n Knoten maximal haben? n^2

Wie viele Kanten kann ein Graph mit n Knoten maximal haben,
wenn er schlingenfrei ist? $n^2 - n$

Teilgraphen

Definition

$G' = (V', E')$ ist ein **Teilgraph** von $G = (V, E)$, genau dann wenn

- $V' \subseteq V$ und
- $E' \subseteq E \cap (V' \times V')$

(notwendig und hinreichende Bedingung)

Was bedeutet das für E' ? Anfangs- und Endknoten in E' müssen auch in V' vorhanden sein.

Beispiel

Sei $G = (\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, \{(0, 1), (0, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (3, 5)\})$.
Handelt es sich bei den folgenden Graphen um Teilgraphen von G ?

- G ? Ja.
- $(\{0, 1, 2\}, \{(0, 1), (0, 2), (1, 2)\})$? Nein.
- $(\{0, 1, 2\}, \{(0, 1), (0, 2), (2, 3)\})$? Nein.
- $G_1 = (\{0, 1, 2\}, \{(0, 1), (0, 2)\})$? Ja.
- $G_2 = (\{3, 4, 5\}, \{(3, 4), (3, 5)\})$? Ja.

Was fällt bei G_1 und G_2 auf? Sie sind formal verschiedene Teilgraphen, aber sehen gleich aus. (isomorphe Graphen)

Pfade

Definitionen

Pfad: $p = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ mit $\forall i \in \mathbb{G}_n : (v_i, v_{i+1}) \in E$
 v_n ist von v_0 aus **erreichbar**.

Länge eines Pfades: Anzahl $|p| - 1$ der **Kanten**

Zyklus/geschlossener Pfad: $v_0 = v_n$

Einfacher Zyklus: Wiederholungsfreier Zyklus

streng zusammenhängend: $\forall x, y \in V$: Es gibt einen Pfad von x
nach y .

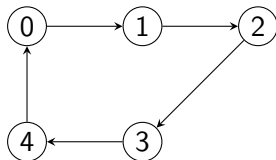
Bäume

Definition

Ein **Baum** ist ein Graph $G = (V, E)$ mit einer Wurzel $r \in V$, so dass es zu jedem Knoten $x \in V$ genau einen Pfad von r nach x gibt.

Potenzen

$G = (V, E)$, $V = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ und
 $E = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 0)\}$



Wir betrachten E als Relation und berechnen

$E^2 = \{(0, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 0), (4, 1)\}$

$(x, y) \in E^2 \Rightarrow \exists$ Pfad der Länge 2 von x nach y .

$E^3 = \{(0, 3), (1, 4), (2, 0), (3, 1), (4, 2)\}$

$(x, y) \in E^3 \Rightarrow \exists$ Pfad der Länge 3 von x nach y .

$E^* = V \times V$

$(x, y) \in E^* \Rightarrow \exists$ Pfad von x nach y .

Ungerichtete Graphen

Definition

ungerichteter Graph $U = (V, E)$ mit nichtleerer Knotenmenge V und Kantenmenge $E \subseteq \{\{x, y\} \mid x \in V \wedge y \in V\}$

Wie unterscheidet sich das von gerichteten Graphen?

- Für $x \neq y$ ist $\{x, y\}$ eine zweielementige Menge ohne Festlegung der Reihenfolge.
- Für $x = y$ ist $\{x, y\} = \{x\}$ eine elementige Menge.

Ungerichtete Graphen

- Wie viele Kanten kann ein ungerichteter Graph mit n Knoten maximal haben, wenn er schlingenfrei ist? $n(n-1)/2$
- Und wenn er Schlingen haben darf? $n(n+1)/2$

Äquivalenzrelationen

Definitionen

Sei $R \subseteq M \times M$.

Reflexiv: $I_M \subseteq R$

Symmetrisch: $\forall x, y \in M : (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$

Transitiv: $\forall x, y, z \in M : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

Äquivalenzrelation: reflexive, transitive und symmetrische Relation

Übertragen auf Graphen:

Reflexiv: Schlingen an allen Knoten

Symmetrisch: Zu jedem Pfeil hin auch der zurück

Transitiv: Wenn ein Pfad von x nach y existiert, dann auch eine direkte Kante

Überblick

- 1 **Huffman-Codierung**
 - Definition
 - Aufgaben
 - Blockcodierung

- 2 **Graphen**
 - Gerichtete Graphen
 - Beispiele
 - Teilgraphen
 - Pfade
 - Bäume
 - Potenzen
 - Ungerichtete Graphen
 - Äquivalenzrelationen

