Grundbegriffe der Informatik

Tutorium 1 - 8. Sitzung

Dennis Felsing

dennis.felsing@student.kit.edu
http://www.stud.uni-karlsruhe.de/~ubcqr/2010w/tut_gbi/

2010-12-13

Karlsruhe Institute of Technology

Überblick

Überblick

1. **Graphen**
   - Graphen mit Knoten- oder Kantenmarkierung
2. Repräsentation von Graphen
3. Rechnen mit Matrizen
4. Berechnung der Erreichbarkeitsrelation

Graphen mit Knoten- oder Kantenmarkierungen

Definitionen

Sei $G = (V, E)$.

Knotenmarkierter Graph: $m_V : V \to M_V$ gegeben

Kantenmarkierter Graph: $m_E : E \to M_E$ gegeben

Gewichtete Graphen: Markierungen sind Zahlen

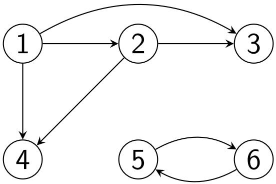
Überblick

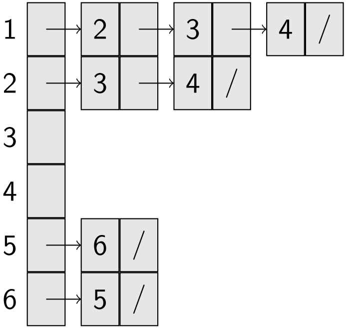
Adjazenzliste

```
class Vertex {
    int id;
    Vertex[] neighbors;
}

class Graph {
    Vertex[] vertices;
}
```

Adjazenzliste





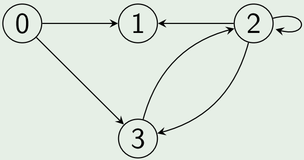
Adjazenzmatrix

Definition

Die **Adjazenzmatrix** eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine Matrix mit

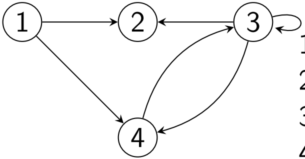
$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,j) \in E \\ 0 & \text{falls } (i,j) \notin E \end{cases}$$

Beispiel

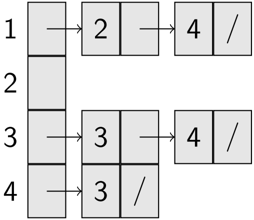


$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Vergleich



$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



- Was geht bei Liste schnell? Zugriff auf alle adjazente Knoten.
- Was geht bei Matrix schnell? Herausfinden ob Kante zwischen x und y.
- Wann spart was Speicherplatz? Liste bei wenigen Kanten, Matrix bei vielen Kanten.

Mehr Gedanken zu Matrizen

- Woran erkennt man ob x eine Schlinge hat?
  1 auf der Diagonalen (Zeile x, Spalte x).
- Welche Eigenschaft hat die Adjazenzmatrix eines ungerichteten Graphen?
  Symmetrie zur Hauptdiagonalen.

Wegematrix

Definition

Die **Wegematrix** W eines Graphen ist definiert durch

$$W_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,j) \in E^* \\ 0 & \text{falls } (i,j) \notin E^* \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{falls es in } G \text{ einen Pfad von } i \text{ nach } j \text{ gibt} \\ 0 & \text{falls es in } G \text{ keinen Pfad von } i \text{ nach } j \text{ gibt} \end{cases}$$

Wegematrix

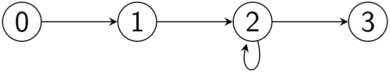
- Wie sieht die Wegematrix aus wenn $A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$?

  $W = A$

- Wann ist allgemein $W = A$?
  Wenn $E^* = E$. Was bedeutet das?
  Wenn die Kantenrelation reflexiv und transitiv ist.

Überblick

2-Erreichbarkeitsrelation



Wir suchen alle Pfade der Länge 2. Wie lassen sich diese mit der Adjazenzmatrix bestimmen?

Matrixmultiplikation

Definition

Sei $A \in \mathbb{K}^{l \times n}$ und $B \in \mathbb{K}^{n \times m}$.
Dann ist $A \cdot B = C \in \mathbb{K}^{l \times m}$ mit

$$C_{ij} = \sum_{k=0}^{n-1} A_{ik} \cdot B_{kj}$$

Achtung

$A \cdot B \neq B \cdot A$

Matrixmultiplikation

Beispiel

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ - Matrizen mit

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i \leq j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \text{ und } B_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i > j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Berechne $A \cdot B$ und $B \cdot A$.

Matrixmultiplikation algorithmisch

$$C_{ij} = \sum_{k=0}^{n-1} A_{ik} \cdot B_{kj}$$

Wir wandeln das direkt in einen Algorithmus um:

for $i \leftarrow 0$ **to** $\ell - 1$ **do**
  for $j \leftarrow 0$ **to** $m - 1$ **do**
    $C_{ij} \leftarrow 0$
    for $k \leftarrow 0$ **to** $n - 1$ **do**
      $C_{ij} \leftarrow C_{ij} + A_{ik} \cdot B_{kj}$
    od
  od
od

Einheitsmatrix

Definition

Die **Einheitsmatrix** ist eine $n \times n$ - Matrix $I \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit

$$I_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

Einheitsmatrix

- $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 9 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 8 & 5 \end{pmatrix} \cdot I = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 9 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 8 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 9 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 8 & 5 \end{pmatrix}$
- $I \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 9 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 8 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 9 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 8 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 9 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 8 & 5 \end{pmatrix}$
- Für jede Matrix A gilt: $I \cdot A = A = A \cdot I$

Matrixaddition

Definition

Für Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{m \times n}$ ist $A + B = C \in \mathbb{K}^{m \times n}$ die **Summe** mit

$$C_{ij} = A_{ij} + B_{ij} \ .$$

Das neutrale Element der Addition ist die **Nullmatrix**.

Achtung

Matrixaddition ist nur für zwei Matrizen mit gleicher Größe definiert!

Potenzen quadratischer Matrizen

Definition

$$A^0 = I$$

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : A^{n+1} = A^n \cdot A$$

Wir erinnern uns an die 2-Erreichbarkeitsrelation. Wir hatten $A \cdot A = A^2$ berechnet.

Was sagt uns der Wert von $(A^2)_{ij}$? Wie viele Pfade der Länge 2 es von i nach j gibt.

Signum

Definitionen

Die **Signum**-Funktion ist

$$sgn : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : sgn(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

und für Graphen

$$sgn : \mathbb{R}^{m \times n} \to \mathbb{R}^{m \times n} : (sgn(M))_{ij} = sgn(M_{ij})$$

$sgn(A^k)$

Es sei G ein gerichteter Graph mit Adjazenzmatrix A.

$$sgn((A^k)_{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{falls in } G \text{ ein Pfad der Länge } k \\ & \quad \text{von } i \text{ nach } j \text{ existiert} \\ 0 & \text{falls in } G \text{ kein Pfad der Länge } k \\ & \quad \text{von } i \text{ nach } j \text{ existiert} \end{cases}$$

Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt: $sgn(A^k)$ ist die Matrix, die die Relation E^k repräsentiert.

E^*

W ist die Wegematrix zu einer Adjazenzmatrix A, also die Matrix-Repräsentation von E^*.

$$W = sgn\left(\sum_{i=0}^{\infty} A^i\right) = sgn\left(\sum_{i=0}^{n-1} A^i\right)$$

Warum muss man nur bis n-1 rechnen?

Summen

$$1 + 2 + 3 + ... + 98 + 99 + 100 = 101 \cdot \frac{100}{2} = 5050$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$$

Überblick

1. **Graphen**
   - Graphen mit Knoten- oder Kantenmarkierung
2. **Repräsentation von Graphen**
   - Adjazenzliste
   - Adjazenzmatrix
   - Vergleich
   - Wegematrix
3. **Rechnen mit Matrizen**
   - 2-Erreichbarkeitsrelation
   - Matrixmultiplikation
   - Einheitsmatrix
   - Matrixaddition
   - Potenzen quadratischer Matrizen
4. **Berechnung der Erreichbarkeitsrelation**
   - Allgemeines
   - Vermischtes


pbfcomics.com
SIR! THERE SEEMS TO BE A LARGE OBJECT IN THE PATH OF OUR-
Reset
SIR! THERE SEEMS TO BE A LARGE OBJECT IN THE PATH OF OUR-
Reset