

Grundbegriffe der Informatik

Tutorium 1 - 10. Sitzung

Dennis Felsing

`dennis.felsing@student.kit.edu`

`http://www.stud.uni-karlsruhe.de/~ubcqr/2010w/tut_gbi/`

2011-01-10



Überblick

- 1 **O-Notation**
 - Wiederholung
 - Mastertheorem
- 2 **Endliche Automaten**

Wiederholung

Ordne die folgenden Funktionen nach ihrem asymptotischen Wachstum:

- $n! \in \Theta(n!)$ (8)
- $2 + 3n \in \Theta(n)$ (4)
- $n^2 + n^3 \in \Theta(n^3)$ (7)
- $3 \log n \in \Theta(\log n)$ (2)
- $5n \cdot 3n \in \Theta(n^2)$ (5)
- $n^n \in \Theta(n^n)$ (9)
- $12\sqrt{5n} \in \Theta(\sqrt{n})$ (3)
- $37^{14} \in \Theta(1)$ (1)
- $n^2 \log n + n \in \Theta(n^2 \log n)$ (6)

Mastertheorem

Wir betrachten Gleichungen dieser Form:

$$T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

Drei Fälle werden unterschieden:

- 1 $f(n) \in O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ für ein $\varepsilon > 0$
 $\Rightarrow T(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$
- 2 $f(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$
 $\Rightarrow T(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \log n)$
- 3 $f(n) \in \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ für ein $\varepsilon > 0$ und
 $\exists d, 0 < d < 1 : \exists n_0 : \forall n > n_0 : a \cdot f\left(\frac{n}{b}\right) \leq d \cdot f(n)$
 $\Rightarrow T(n) \in \Theta(f(n))$

Beispiel 1

$$T(n) = 8T\left(\frac{n}{2}\right) + 42n^2$$

$$a = 8, b = 2, f(n) \in \Theta(n^2)$$

$$\log_a b = \log_2 8 = 3$$

$$f(n) \in O(n^{\log_b a - \varepsilon}) = O(n^{3 - \varepsilon}) \text{ mit } \varepsilon = 1 \text{ (1. Fall MT)}$$

$$\Rightarrow T(n) \in \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^3)$$

Beispiel 2

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 10n$$

$$a = 2, b = 2, f(n) \in \Theta(n)$$

$$\log_b a = \log_2 2 = 1$$

$$f(n) \in \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n) \text{ (2.Fall MT)}$$

$$\Rightarrow T(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \log n) = \Theta(n \cdot \log n)$$

Beispiel 3

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$$

$$a = 2, b = 2, f(n) \in \Theta(n^2)$$

$$\log_b a = \log_2 2 = 1$$

$$n^2 \in \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon}) = \Omega(n^2) \text{ mit } \varepsilon = 1$$

$$2\left(\frac{n}{2}\right)^2 \leq dn^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}n^2 \leq dn^2$$

$$\text{Mit } d = \frac{1}{2} : \forall n > 1 : \frac{1}{2}n^2 \leq \frac{1}{2}n^2$$

$$\Rightarrow T(n) \in \Theta(f(n)) = \Theta(n^2)$$

Überblick

- 1 O-Notation
- 2 **Endliche Automaten**
 - Mealy-Automaten
 - f^* und f^{**}
 - g^* und g^{**}
 - Automaten entwerfen
 - Moore-Automaten

Mealy-Automaten

Definition

Ein **Mealy-Automat** ist ein Tupel (Z, X, Y, f, g, z_0) mit

Z Endliche Zustandsmenge

X Eingabealphabet

Y Ausgabealphabet

f Zustandsübergangsfunktion ($f : Z \times X \rightarrow Z$)

g Ausgabefunktion ($g : Z \times X \rightarrow Y^*$)

z_0 Startzustand ($z_0 \in Z$)

f^* und f^{**} **Definition** $f^* : Z \times X^* \rightarrow Z$

$$f^*(z, \varepsilon) = z$$

$$\forall w \in X^* : \forall x \in X : f^*(z, wx) = f(f^*(z, w), x)$$

In Worten: $f^*(z, w)$ ist der Zustand nach Abarbeitung von w beginnend bei Zustand z .

Definition $f^{**} : Z \times X^* \rightarrow Z^*$

$$f^{**}(z, \varepsilon) = z$$

$$\forall w \in X^* : \forall x \in X : f^{**}(z, wx) = f^{**}(z, w) \cdot f(f^*(z, w), x)$$

In Worten: $f^{**}(z, w)$ ist das Wort, das entsteht wenn man alle Zustände bei der Abarbeitung von w hintereinander schreibt.

f^{**} ohne f^*

Definition $f^{**} : Z \times X^* \rightarrow Z^*$

$$f^{**}(z, \varepsilon) = z$$

$$\forall w \in X^* : \forall x \in X : f^{**}(z, wx) = f^{**}(z, w) \cdot f(f^*(z, w), x)$$

In Worten: $f^{**}(z, w)$ ist das Wort, das entsteht wenn man alle Zustände bei der Abarbeitung von w hintereinander schreibt.

Aufgabe

Finde eine alternative Definition für f^{**} , die ohne f^* auskommt.

Lösung

$$f^{**}(z, \varepsilon) = z$$

$$\forall w \in X^* : \forall x \in X : f^{**}(z, xw) = z \cdot f^{**}(f(z, x), w)$$

g^* und g^{**}

Definition $g^* : Z \times X^* \rightarrow Y^*$

$$g^*(z, \varepsilon) = \varepsilon$$

$$\forall w \in X^* : \forall x \in X : g^*(z, wx) = g(f^*(z, w), x)$$

In Worten: $g^*(z, w)$ ist die letzte Ausgabe nach Abarbeitung von w beginnend bei Zustand z .

Definition $g^{**} : Z \times X^* \rightarrow Y^*$

$$g^{**}(z, \varepsilon) = z$$

$$\forall w \in X^* : \forall x \in X : g^{**}(z, wx) = g^{**}(z, w) \cdot g(f^*(z, w), x)$$

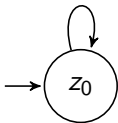
In Worten: $f^{**}(z, w)$ ist das Wort, das entsteht wenn man alle Ausgaben bei der Abarbeitung von w hintereinander schreibt.

Automaten entwerfen

Aufgabe

Gib einen Automaten an, der bei Eingaben aus $\{a, b\}^*$ jedes Zeichen doppelt ausgibt. Also z.B. für $abaa$ wird $aabbaaaa$ ausgegeben. (Anfangszustand z_0)

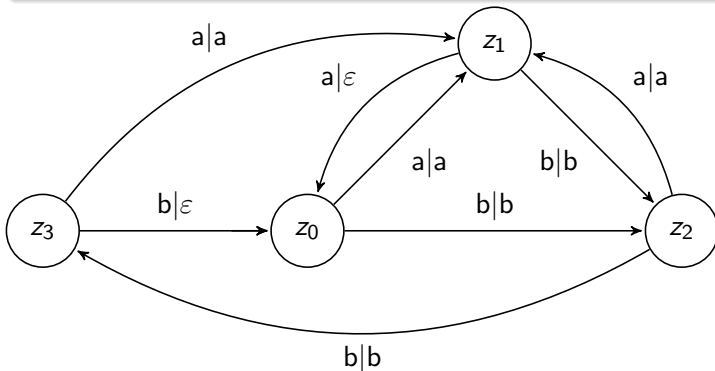
$a|aa, b|bb$



Automaten entwerfen

Aufgabe

Gib einen Automaten an, der jedes zweite a und jedes dritte b in Folge aus einer Eingabe aus $\{a, b\}^*$ entfernt. (Anfangszustand z_0)



Moore-Automaten

Definition

Wie Mealy-Automaten, außer:

- Ausgaben passieren im Zustand, nicht im Zustandsübergang

Mealy- und Moore-Automaten lassen sich einfach ineinander umwandeln.

Überblick

- 1 **O-Notation**
 - Wiederholung
 - Mastertheorem

- 2 **Endliche Automaten**
 - Mealy-Automaten
 - f^* und f^{**}
 - g^* und g^{**}
 - Automaten entwerfen
 - Moore-Automaten

