Grundbegriffe der Informatik

Tutorium 1 - 14. Sitzung

Dennis Felsing

dennis.felsing@student.kit.edu
http://www.stud.uni-karlsruhe.de/~ubcqr/2010w/tut_gbi/

2011-02-07

Karlsruhe Institute of Technology

Äquivalenzrelationen

Äquivalenzrelationen

Definitionen

Sei $R_{\equiv} \subseteq M \times M$.

Reflexiv : $\forall x \in M : x \equiv x$

Symmetrisch : $\forall x, y \in M : x \equiv y \Rightarrow y \equiv x$

Transitiv : $\forall x, y, z \in M : x \equiv y \wedge y \equiv z \Rightarrow x \equiv z$

Äquivalenzrelation : reflexive, transitive und symmetrische Relation

Beispiele

- Gleichheitsrelation $R_{=} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist eine Äquivalenzrelation.
- $\{(a,a),(a,b),(b,b),(b,c),(c,c)\} \subseteq \{a,b,c\} \times \{a,b,c\}$ ist reflexiv, nicht symmetrisch und nicht transitiv.
- $R_{\leq} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist reflexiv, transitiv und nicht symmetrisch.
- $R_{<} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist transitiv, nicht symmetrisch und nicht reflexiv.

Äquivalenzrelationen

Definitionen

Sei $R \subseteq M \times M$.

Reflexiv : $\forall x \in M : (x, x) \in R$

Symmetrisch : $\forall x, y \in M : (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$

Transitiv : $\forall x, y, z \in M : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

Äquivalenzrelation : reflexive, transitive und symmetrische Relation

Beispiele

- $xVy \Leftrightarrow$ x ist Vorfahre von y. V ist transitiv, nicht symmetrisch und nicht reflexiv.
- $x\heartsuit y \Leftrightarrow$ x liebt y. $\heartsuit$ ist nicht symmetrisch, nicht transitiv und nicht reflexiv.
- $R \subseteq \{\} \times \{\}$ ist eine Äquivalenzrelation.

Äquivalenzrelationen

Definitionen

Reflexiv : $\forall x \in M : (x, x) \in R$

Symmetrisch : $\forall x, y \in M : (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$

Transitiv : $\forall x, y, z \in M : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

Äquivalenzrelation : reflexiv, transitiv und symmetrisch

Übertragung auf Graphen

Reflexiv : Schlingen an allen Knoten

Symmetrisch : Zu jedem Pfeil hin auch der zurück

Transitiv : Wenn ein Pfad von x nach y existiert, dann auch eine direkte Kante

Äquivalenzrelation: Klumpen, die alle miteinander verbunden sind, aber nach außen keine Verbindungen haben

Äquivalenzrelationen

Kongruenz modulo n

Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ heißen *kongruent modulo n*, wenn $x - y$ durch n teilbar, also ganzzahliges Vielfaches von n ist. Dann schreibt man $x \equiv y (\text{mod } n)$.

Reflexivität : $x - x = 0$ Vielfaches von n ✓

Symmetrie : Sei $x - y$ Vielfaches von n. Dann ist auch $y - x = -(x - y)$ Vielfaches von n. ✓

Transitivität : Seien $x - y = k_1 n$ und $y - z = k_2 n$ mit $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Dann ist $x - z = (x - y) + (y - z) = (k_1 + k_2)n$ Vielfaches von n. ✓

$\Rightarrow$ Kongruenz modulo n ist eine Äquivalenzrelation

Äquivalenzrelation von Nerode

Definition

Für alle $w_1, w_2 \in A^*$ ist
$w_1 \equiv_L w_2 \Leftrightarrow \big(\forall w \in A^* : w_1 w \in L \Leftrightarrow w_2 w \in L\big)$

Was bedeutet das, wenn $w_1 \equiv_L w_2$?
Für alle Wörter die man an w_1 und w_2 anhängen kann sind entweder beide entstehenden Wörter in der Sprache L oder beide nicht.
Wenn für ein Suffix w gelten würde, dass $w_1 w \in L$, aber $w_2 w \notin L$ (oder umgekehrt), so sind w_1,w_2 nicht Nerode-äquivalent.

Äquivalenzklassen und Faktormengen

Defintionen

Äquivalenzklasse von x: $[x]_\equiv = \{y \in M \mid x \equiv y\}$

Faktormenge oder *Faserung von M nach* $\equiv$:

$$M_{/\equiv} = \{[x]_\equiv \mid x \in M\}$$

Äquivalenzklassen

Behauptung

$x \equiv y \Rightarrow [x] = [y]$

Beweis

„$\subseteq$": Sei $z \in [x]$. Es gilt also $x \equiv z$. Aufgrund der Symmetrie gilt auch $z \equiv x$.
Mit $x \equiv y$ und Transitivität folgt $z \equiv y$.
Also $y \equiv z$ und somit $z \in [y]$.
$\Rightarrow [x] \subseteq [y]$

„$\supseteq$": Analog mit x und y vertauscht. $\square$

Äquivalenzklassen

Behauptung

Wenn $z \in [x]$ und $z \in [y]$, dann $[x] = [y]$.

Beweis

Wenn $z \in [x]$ und $z \in [y]$, dann $x \equiv z$ und $y \equiv z$.
Aufgrund der Symmetrie folgt $x \equiv z$ und $z \equiv y$.
Aus der Transitivität folgt $x \equiv y$.
Wie wir eben bewiesen haben, gilt nun $[x] = [y]$. $\square$

Faktormengen

Wir wollen die Faktormenge von $\mathbb{Z}$ für Kongruenz modulo 5 bestimmen.
Es gibt nur diese fünf Äquivalenzklassen:
$\mathbb{Z}_{/\equiv_5} = \mathbb{Z}_5 = \{[0], [1], [2], [3], [4]\}$

Faktormengen

Bestimme die Faktormenge der Nerode-Relation zur Sprache
$L =< aba* >$.
$\{[\varepsilon], [a], [ab], [b]\}$

Kongruenzrelationen

Verträglichkeit von Relationen mit Operatoren

Definition

Seien $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M, $f : M \to M$ eine Funktion und $\diamond$ eine binäre Operation.

- $\equiv$ und f sind *verträglich* $:\Leftrightarrow$ $\forall x_1, x_2 \in M : x_1 \equiv x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \equiv f(x_2)$
- $\equiv$ und $\diamond$ sind *verträglich* $:\Leftrightarrow$ $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in M : x_1 \equiv x_2 \wedge y_1 \equiv y_2 \Leftrightarrow x_1 \diamond y_1 \equiv x_2 \diamond y_2$
- Äquivalenzrelation, die mit allen interessierenden Funktionen und Operationen verträglich ist, nennt man *Kongruenzrelationen*.

Modulo und Addition

Behauptung

$\equiv$ mod n ist mit $+$ auf den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ verträglich

Beweis

Seien $x_1 \equiv x_2$ mod n und $y_1 \equiv y_2$ mod n, also
$\exists k \in \mathbb{Z} : x_1 - x_2 = k \cdot n$ und $\exists m \in \mathbb{Z} : y_1 - y_2 = m \cdot n$.
Somit folgt
$(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = n \cdot (k + m)$.
Also $(x_1 + y_1) \equiv (x_2 + y_2)$ mod n. $\square$

Modulo und Multiplikation

Behauptung

$\equiv \bmod n$ ist mit $\cdot$ auf den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ verträglich

Beweis

$x_1 \cdot y_1 = (x_2 + k \cdot n) \cdot (y_2 + m \cdot n) = x_2 \cdot y_2 + (x_2 m + k y_2 + km) \cdot n$

$x_1 \cdot y_1 - x_2 \cdot y_2$ ist somit ganzzahliges Vielfaches von n $\square$

Rechnen mit Äquivalenzklassen

Wir betrachten Kongruenz modulo 5:

- $[3] + [4] = [3 + 4] = [7] = [2]$
- $[2] + [3] = [2 + 3] = [5] = [0]$
- $[2] + [3] = [7] + [-12] = [-5] = [0]$
- $[2] \cdot [3] = [2 \cdot 3] = [6] = [1]$

Wann ist $[x] \cdot [y] = [0]$?Wenn bereits $[x] = [0]$ oder $[y] = [0]$, da 5 eine Primzahl ist.

Rechnen mit Äquivalenzklassen

Es ergeben sich die folgenden Ergebnisse für $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$:

$+$	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]	[0]
[2]	[2]	[3]	[4]	[0]	[1]
[3]	[3]	[4]	[0]	[1]	[2]
[4]	[4]	[0]	[1]	[2]	[3]

$\cdot$	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[2]	[0]	[2]	[4]	[1]	[3]
[3]	[0]	[3]	[1]	[4]	[2]
[4]	[0]	[4]	[3]	[2]	[1]

Halbordnungen

Halbordnungen

Definitionen

Antisymmetrisch: $\forall x, y \in M : x \sqsubseteq y \wedge y \sqsubseteq x \Rightarrow x = y$

Halbordnung: reflexive, transitive, antisymmetrische Relation

Halbordnung auf Alphabeten

Behauptung

Die Relation $\sqsubseteq_p$ auf A^* mit $v \sqsubseteq_p w \Leftrightarrow \exists u : vu = w$ ist eine Halbordnung.

Beweis

Reflexivität :Für alle $w \in A^*$ gilt $w\varepsilon = w$

Transitivität :Seien $w_1 \sqsubseteq_p w_2$ und $w_2 \sqsubseteq_p w_3$. Dann ex. u_1, u_2 mit $w_1 u_1 = w_2$ und $w_2 u_2 = w_3$. Also $w_1(u_1 u_2) = (w_1 u_1) u_2 = w_2 u_2 = w_3 \Rightarrow w_1 \sqsubseteq_p w_3$

Antisymmetrie :Seien $w_1 \sqsubseteq_p w_2$ und $w_2 \sqsubseteq_p w_1$. Dann ex. u_1 und u_2 mit $w_1 u_1 = w_2$ und $w_2 u_2 = w_1$. Also $w_1 u_1 u_2 = w_2 u_2 = w_1$. Somit muss $| u_1 | = | u_2 | = 0 \Rightarrow u_1 = u_2 = \varepsilon \Rightarrow w_1 = w_2$

□

Weitere Relation

Frage

Ist $\sqsubseteq$ mit $w_1 \sqsubseteq w_2 \Leftrightarrow |w_1| \leq |w_2|$ eine Halbordnung?

Lösung

Nein, Antisymmetrie ist verletzt. Zum Beispiel gilt über $\{a, b\}$ dass $aaa \sqsubseteq bbb$ und $bbb \sqsubseteq aaa$, aber $aaa \neq bbb$.

Inklusion

Frage

Ist $\subseteq$ auf der Potenzmenge 2^M der Menge M eine Halbordnung?

Definition

Die Potenzmenge 2^M einer Menge M ist die Menge aller Teilmengen dieser Menge.

Inklusion

Lösung

Reflexivität :Für jede Teilmenge T der Menge M gilt: $T \subseteq T$, denn jede Menge ist ihre eigene Teilmenge

Transitivität :Sind alle Elemente von T_1 in T_2 und alle Elemente von T_2 in T_3, so sind auch alle Elemente von T_1 in T_3. Also gilt $T_1 \subseteq T_2 \wedge T_2 \subseteq T_3 \Rightarrow T_1 \subseteq T_3$.

Antisymmetrie :Gilt für zwei Teilmengen T_1, T_2, dass $T_1 \subseteq T_2$ und $T_2 \subseteq T_1$, so ist $T_1 = T_2$, denn beide Mengen enthalten die Elemente der jeweils anderen Menge.

Hasse-Diagramm

Jede Relation ist als Graph darstellbar. Bei Halbordnungen wird das aber ziemlich unübersichtlich. Beim Hasse-Diagramm H_R zur Relation R werden alle reflexiven und transitiven Kanten weggelassen.

Überblick

Klausur

Wichtig

Die Klausur findet am 1. März um 17:00 statt.

Was ist vor der Klausur sinnvoll?

- **Anmeldung im Studienportal überprüfen!**
- Skript aktiv lesen (Markieren, Notizen, Zusammenfassung, ...)
- Übungsblätter wiederholen, insbesondere rot angestrichenes
- Alte Klausuren lösen
- Bei Problemen Tutor E-Mail schreiben


pbfcomics.com
Nice shirt, gay-wad
I'll call for help, Jason
Unicorn Power!