Algorithmen I

Tutorium 1 - 11. Sitzung

Dennis Felsing

dennis.felsing@student.kit.edu
www.stud.uni-karlsruhe.de/~ubcqr/algo

2011-06-27

Karlsruhe Institute of Technology

Überblick

Datenstrukturen disjunkter Mengen

Idee

Verwaltung disjunkter dynamischer Mengen $S = \{S_1, S_2, ..., S_k\}$
Mengen durch **Repräsentanten** gekennzeichnet

Operationen

- $\textsc{Make-Set}(x)$: Erzeuge Menge mit einzigem Element x
- $\textsc{Union}(x, y)$: Vereinige Mengen von x und y
- $\textsc{Find-Set}(x)$: Gibt Zeiger auf Repräsentanten der Menge von x zurück

Implementierungen

- Verkettete Listen
- Bäume

Minimale Spannbäume

Gegeben

- Zusammenhängender, ungerichteter Graph $G = (V, E)$
- Kantengewichtsfunktion $w : E \to \mathbb{R}$

Definitionen

- **Minimaler Spannbaum**: Azyklische Teilmenge $T \subseteq E$, die alle Knoten V verbindet und minimales Kantengewicht hat.

Minimale Spannbäume

Aufbau eines MST

Generic-MST(G, w)

$A = \emptyset$
while A ist kein Spannbaum
    Finde sichere Kante (u, v) für A
    $A = A \cup \{(u, v)\}$
return A

Wie bestimmt man eine sichere Kante?

Idee Kruskal

verbleibende Kante in gesamtem Graph mit geringstem Gewicht

Idee Prim

anliegende Kante mit geringstem Gewicht (analog Dijkstra)

Algorithmus von Kruskal

```
MST-KRUSKAL(G, w)
A = ∅
for each v ∈ G.V
    MAKE-SET(v)
sortiere Kanten aus G.E*
for each (u, v) ∈ G.E*
    if FIND-SET(u) ≠ FIND-SET(v)
        A = A ∪ {(u, v)}
        UNION(u, v)
return A
```

*: in nichtfallender Reihenfolge nach Gewicht w

Laufzeit: $O(|E| \log |V|)$

Algorithmus von Prim

```
MST-Prim(G, w, r)
for each u ∈ G.V
    u.schlüssel = ∞
    u.π = NIL
r.schlüssel = 0
Q = G.V
while Q ≠ ∅
    u = Extract-Min(Q)
    for each v ∈ G.Adj[u]
        if v ∈ Q und w(u, v) < v.schlüssel
            v.π = u
            v.schlüssel = w(u, v)
```

Laufzeit: $O(|E| \log |V|)$

Klausuraufgaben

Hauptklausur 2010: 5

Gegeben sei ein ungerichteter zusammenhängender Graph G, in dem jede Kante mit einem positiven Gewicht versehen ist. In G sei ein einfacher Kreis markiert, so dass alle Kreiskanten ein Gewicht $< r$ und alle Kanten außerhalb des Kreises ein Gewicht $> r$ haben für ein $r \in \mathbb{R}_+$.

Hinweis: In einem einfachen Kreis haben alle Knoten Grad 2.

a. Zeichnen Sie in die folgenden beiden identischen Beispielgraphen jeweils einen MST ein. Dabei soll jeder MST mindestens eine Kante des markierten Kreises enthalten, die der andere MST nicht enthält.

b. Sei k die Anzahl der Kanten auf dem markierten Kreis in G. Zeigen Sie: Jeder MST in G enhält genau $k - 1$ Kanten des markierten Kreises.

Klausuraufgaben

Nachklausur 2010: 1 d

Zeigen oder widerlegen Sie, dass $5^{\log_3 n} \in O(n^2)$ gilt.

Nachklausur 2010: 1 e

Zeigen oder widerlegen Sie, dass $2^n \in \Omega(2^{\frac{n}{2}})$ gilt.

Hauptklausur 2010: 1 g

Zeigen oder widerlegen Sie, dass $2^{2^{n+1}} \in O(2^{2^n})$ gilt.

Klausuraufgaben

Hauptklausur 2010: 1 c

Lösen Sie die beiden folgenden Rekurrenzen im Θ-Kalkül:

$$T(n) = 17n + 2T(\frac{n}{3}), T(1) = 3$$

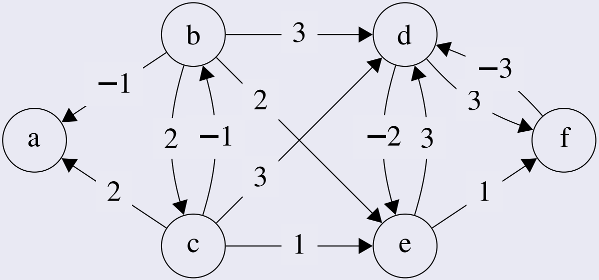
$$S(n) = 3n + 9S(\frac{n}{3}), S(1) = 23$$

mit $n = 3^k$ und $k \in \mathbb{N}_{>0}$

Klausuraufgaben

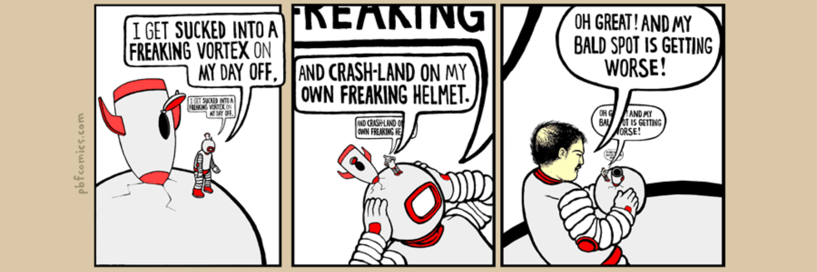
Nachklausur 2010: 1 a

Enthält folgender gerichteter gewichteter Graph einen kürzesten Weg von b nach f?



Falls ja, geben Sie einen solchen kürzesten Weg an. Falls nein, begründen Sie kurz, warum kein solcher kürzester Weg existiert.

Übersicht


I GET SUCKED INTO A FREAKING VORTEX ON MY DAY OFF,
FREAKING
AND CRASH-LAND ON MY OWN FREAKING HELMET.
OH GREAT! AND MY BALD SPOT IS GETTING WORSE!
pbfcomics.com