

Algorithmen I

Tutorium 1 - 11. Sitzung

Dennis Felsing

`dennis.felsing@student.kit.edu`
`www.stud.uni-karlsruhe.de/~ubcqr/algo`

2011-06-27



Überblick

- 1 **Datenstrukturen disjunkter Mengen**
- 2 **Minimale Spannbäume**
 - Allgemeines
 - Algorithmus von Kruskal
 - Algorithmus von Prim
- 3 **Klausuraufgaben**

Datenstrukturen disjunkter Mengen

Idee

Verwaltung disjunkter dynamischer Mengen $S = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$
Mengen durch **Repräsentanten** gekennzeichnet

Operationen

- MAKE-SET(x): Erzeuge Menge mit einzigem Element x
- UNION(x, y): Vereinige Mengen von x und y
- FIND-SET(x): Gibt Zeiger auf Repräsentanten der Menge von x zurück

Implementierungen

- Verkettete Listen
- Bäume



Minimale Spannbäume

Gegeben

- Zusammenhängender, ungerichteter Graph $G = (V, E)$
- Kantengewichtsfunktion $w : E \rightarrow \mathbb{R}$

Definitionen

- **Minimaler Spannbaum:** Azyklische Teilmenge $T \subseteq E$, die alle Knoten V verbindet und minimales Kantengewicht hat.

Minimale Spannbäume

Aufbau eines MST

GENERIC-MST(G, w)

- 1 $A = \emptyset$
- 2 **while** A ist kein Spannbaum
- 3 Finde sichere Kante (u, v) für A
- 4 $A = A \cup \{(u, v)\}$
- 5 **return** A

Wie bestimmt man eine sichere Kante?

Idee Kruskal

verbleibende Kante in gesamtem Graph mit geringstem Gewicht

Idee Prim

anliegende Kante mit geringstem Gewicht (analog Dijkstra)

Algorithmus von Kruskal

MST-KRUSKAL(G, w)

```
1   $A = \emptyset$ 
2  for each  $v \in G.V$ 
3      MAKE-SET( $v$ )
4  sortiere Kanten aus  $G.E^*$ 
5  for each  $(u, v) \in G.E^*$ 
6      if FIND-SET( $u$ )  $\neq$  FIND-SET( $v$ )
7           $A = A \cup \{(u, v)\}$ 
8          UNION( $u, v$ )
9  return  $A$ 
```

*: in nichtfallender Reihenfolge nach Gewicht w

Laufzeit: $O(|E| \log |V|)$

Algorithmus von Prim

MST-PRIM(G, w, r)

```
1  for each  $u \in G.V$ 
2       $u.schlüssel = \infty$ 
3       $u.\pi = \text{NIL}$ 
4   $r.schlüssel = 0$ 
5   $Q = G.V$ 
6  while  $Q \neq \emptyset$ 
7       $u = \text{EXTRACT-MIN}(Q)$ 
8      for each  $v \in G.Adj[u]$ 
9          if  $v \in Q$  und  $w(u, v) < v.schlüssel$ 
10              $v.\pi = u$ 
11              $v.schlüssel = w(u, v)$ 
```

Laufzeit: $O(|E| \log |V|)$

Klausuraufgaben

Hauptklausur 2010: 5

Gegeben sei ein ungerichteter zusammenhängender Graph G , in dem jede Kante mit einem positiven Gewicht versehen ist. In G sei ein einfacher Kreis markiert, so dass alle Kreiskanten ein Gewicht $< r$ und alle Kanten außerhalb des Kreises ein Gewicht $> r$ haben für ein $r \in \mathbb{R}_+$.

Hinweis: In einem einfachen Kreis haben alle Knoten Grad 2.

a. Zeichnen Sie in die folgenden beiden identischen Beispielgraphen jeweils einen MST ein. Dabei soll jeder MST mindestens eine Kante des markierten Kreises enthalten, die der andere MST nicht enthält.

b. Sei k die Anzahl der Kanten auf dem markierten Kreis in G . Zeigen Sie: Jeder MST in G enthält genau $k - 1$ Kanten des markierten Kreises.

Klausuraufgaben

Nachklausur 2010: 1 d

Zeigen oder widerlegen Sie, dass $5^{\log_3 n} \in O(n^2)$ gilt.

Nachklausur 2010: 1 e

Zeigen oder widerlegen Sie, dass $2^n \in \Omega(2^{\frac{n}{2}})$ gilt.

Hauptklausur 2010: 1 g

Zeigen oder widerlegen Sie, dass $2^{2^{n+1}} \in O(2^{2^n})$ gilt.

Klausuraufgaben

Hauptklausur 2010: 1 c

Lösen Sie die beiden folgenden Rekurrenzen im Θ -Kalkül:

$$T(n) = 17n + 2T\left(\frac{n}{3}\right), T(1) = 3$$

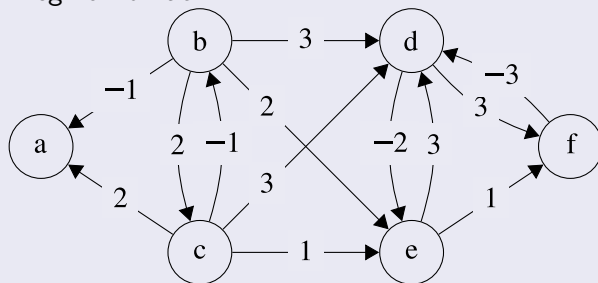
$$S(n) = 3n + 9S\left(\frac{n}{3}\right), S(1) = 23$$

mit $n = 3^k$ und $k \in \mathbb{N}_{>0}$

Klausuraufgaben

Nachklausur 2010: 1 a

Enthält folgender gerichteter gewichteter Graph einen kürzesten Weg von b nach f ?



Falls ja, geben Sie einen solchen kürzesten Weg an. Falls nein, begründen Sie kurz, warum kein solcher kürzester Weg existiert.

Übersicht

- 1 **Datenstrukturen disjunkter Mengen**
- 2 **Minimale Spannbäume**
 - Allgemeines
 - Algorithmus von Kruskal
 - Algorithmus von Prim
- 3 **Klausuraufgaben**

