Algorithmen I

Tutorium 1 - 12. Sitzung

Dennis Felsing

dennis.felsing@student.kit.edu
www.stud.uni-karlsruhe.de/~ubcqr/algo

2011-07-04

Überblick

Dynamische Programmierung

Idee

- Problem in Teilprobleme aufteilen
- Teilprobleme lösen und speichern
- Auf bereits gespeicherte Lösung zugreifen statt neu zu lösen
- Bottom-Up oder Top-Down mit Memoisation

Notwendige Eigenschaften

1. **Optimale Unterstruktur**: Optimale Lösung besteht aus optimalen Lösungen von Teilproblemen
2. **Überlappende Unterprobleme**: Rekursiver Algorithmus landet mehrfach bei selbem Problem (ansonsten Teile-und-Herrsche)
3. **Rekonstruieren einer optimalen Lösung**: Merken, welche Schritte gemacht wurden

Längste gemeinsame Teilfolge

Gegeben

Organismus 1 mit DNA $S_1 =$ ACCGGTCGAGTGCGCGGAAGCCGGCCGAA
Organismus 2 mit DNA $S_2 =$ GTCGTTCGGAATGCCGTTGCTCTGTAAA

Gesucht

Ähnlichkeit der Organismen $\Leftrightarrow$ Länge der längsten gemeinsamen Teilfolge. Hier: $S_3 =$ GTCGTCGGAAGCCGGCCGAA

Längste gemeinsame Teilfolge

Formalisierung

Sequenz $X = \langle x_1, x_2, ..., x_m \rangle$ statt DNA-Strang.
$X_i = \langle x_1, x_2, ..., x_i \rangle$

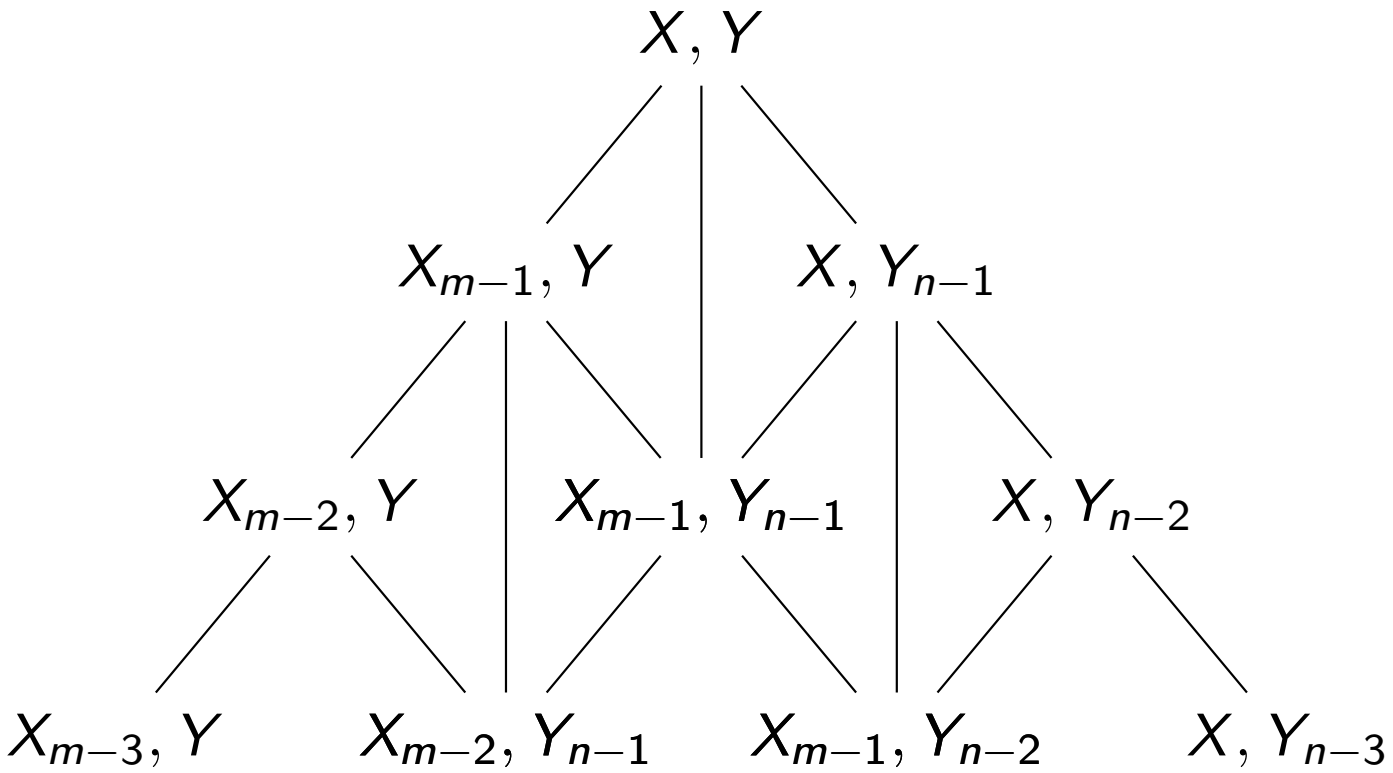
Theorem

Seien $X = \langle x_1, x_2, ..., x_m \rangle$ und $Y = \langle y_1, y_2, ..., y_n \rangle$ Sequenzen und sei $Z = \langle z_1, z_2, ..., z_m \rangle$ die LGT von X und Y.

1. Falls $x_m = y_n$: $z_k = x_m = y_n$ und Z_{k-1} ist eine LGT von X_{m-1} und Y_{n-1}
2. Falls $x_m \neq y_n$ und $z_k \neq x_m$: Z ist eine LGT von X_{m-1} und Y
3. Falls $x_m \neq y_n$ und $z_k \neq y_n$: Z ist eine LGT von X und Y_{n-1}

$\Rightarrow$ **Optimale Unterstruktur!**

Längste gemeinsame Teilfolge



$\Rightarrow$ **Überlappende Unterprobleme!**

Längste gemeinsame Teilfolge

Sei $c[i,j]$ die Länge der LGT der Sequenzen X_i und Y_j:

$$c[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{falls } i = 0 \text{ oder } j = 0 \\ c[i-1,j-1]+1 & \text{falls } i,j > 0 \text{ und } x_i = y_j \\ max(c[i,j-1], c[i-1,j]) & \text{falls } i,j > 0 \text{ und } x_i \neq y_j \end{cases}$$

LGT-Länge(X, Y)

```
 1  m = X.länge
 2  n = Y.länge
 3  Seien b[1..m, 1..n] und c[0..m, 0..n] neue Tabellen
 4  for i = 1 to m
 5        c[i, 0] = 0
 6  for j = 0 to n
 7        c[0, j] = 0
 8  for i = 1 to m
 9        for j = 1 to n
10              if x_i == y_j
11                    c[i, j] = c[i − 1, j − 1] + 1
12                    b[i, j] =↖
13              elseif c[i − 1, j] ≥ c[i, j − 1]
14                    c[i, j] = c[i − 1, j]
15                    b[i, j] =↑
16              else c[i, j] = c[i, j − 1]
17                    b[i, j] =←
18  return c und b
```

Längste gemeinsame Teilfolge

PRINT-LGT(b, X, i, j)

```
1  if i == 0 oder j == 0
2        return
3  if b[i, j] ==↖
4        PRINT-LGT(b, X, i − 1, j − 1)
5        print x_i
6  elseif b[i, j] ==↑
7        PRINT-LGT(b, X, i − 1, j)
8  else PRINT-LGT(b, X, i, j − 1)
```

Definition: Zu einem ungerichteten Graph $G = (V, E)$ ist eine Menge $U \subset V$ eine *unabhängige Menge* genau dann, wenn keine Knoten aus U in G benachbart sind, d.h. $\forall u, v \in U : \{u, v\} \notin E$.
Definition: Zu einem ungerichteten Graph $G = (V, E)$ mit Knotengewichtsfunktion $c : V \to \mathbb{N}_{>0}$ ist eine Menge $U \subset V$ eine *maximale unabhängige Menge*, wenn U unabhängige Menge ist und unter allen unabhängigen Mengen das größtmögliche Gesamtgewicht hat, d.h. es existiert keine unabhängige Menge $U' \subset V$ mit $\sum_{u \in U'} c(u) > \sum_{u \in U} c(u)$.
Festlegung: Im Folgenden sei $G := v_1 - v_2 - ... - v_k$ ein Pfad, d.h. G bestehe ausschließlich aus Kanten $\{v_l, v_{l+1}\}$ für $l \in \{1, ...k-1\}$. Für $l \leq k$ sei weiter $G_l := v_1 - ... - v_l$ der Teilpfad von G, der beim Knoten v_1 beginnt und bis einschließlich Knoten v_l geht. G_0 soll als leerer Pfad interpretiert werden.
a. Geben Sie zu dem abgebildeten Pfad die *maximale unabhängige Menge* U an, indem Sie die Knoten markieren, die zu U gehören. Geben Sie außerdem das Gesamtgewicht von U an. Die Knotengewichte stehen in den Knoten.

b. Es sei $m(l)$ das Gesamtgewicht einer *maximalen unabhängigen Menge* U_l auf G_l. Geben Sie eine Rekurrenz für $m(l)$ an, indem Sie auf die Werte der $m(i)$ für $i < l$ zurückgreifen! Begründen Sie kurz!

$$m(0) = 0$$
$$m(1) = c(v_1)$$
$$m(l) =$$

c. Skizzieren Sie einen Algorithmus, der eine *maximale unabhängige Menge* U auf einem Pfad $G = v_1 - ... - v_k$ mit Knotengewichtsfunktion c **berechnet** und **ausgibt**. Der Algorithmus darf die Laufzeit $O(k)$ nicht überschreiten.
d. Skizzieren Sie kurz einen Linearzeit-Algorithmus, der eine *maximale unabhängige Menge* auf einem ungerichteten *Baum* mit Knotengewichtsfunktion c **berechnet** und **ausgibt**.

Greedy-Algorithmen

Allgemeines

- Idee: Wähle lokal optimale Entscheidung
- Liefert häufig nicht-optimale Lösung
- Bisher gesehen: MST, Dijkstra

Algorithmus von Kruskal

MST-KRUSKAL(G, w)

```
1  A = ∅
2  for each v ∈ G.V
3        MAKE-SET(v)
4  sortiere Kanten aus G.E*
5  for each (u, v) ∈ G.E*
6        if FIND-SET(u) ≠ FIND-SET(v)
7              A = A ∪ {(u, v)}
8              UNION(u, v)
9  return A
```

*: in nichtfallender Reihenfolge nach Gewicht w

Laufzeit: $O(|E| \log |V|)$

Algorithmus von Prim

MST-PRIM(G, w, r)

```
 1  for each u ∈ G.V
 2      u.schlüssel = ∞
 3      u.π = NIL
 4  r.schlüssel = 0
 5  Q = G.V
 6  while Q ≠ ∅
 7      u = EXTRACT-MIN(Q)
 8      for each v ∈ G.Adj[u]
 9          if v ∈ Q und w(u, v) < v.schlüssel
10              v.π = u
11              v.schlüssel = w(u, v)
```

Laufzeit: $O(|E| \log |V|)$

Dijsktra-Algorithmus

Voraussetzung: nichtnegative Kantengewichten

DIJSKTRA(G, w, s)

```
1  INITIALIZE_SINGLE_SOURCE(G, s)
2  S = ∅
3  Q = G.V
4  while Q ≠ ∅
5        u = EXTRACT-MIN(Q)
6        S = S ∪ {u}
7        for each v ∈ G.Adj[u]
8              RELAX(u, v, w)
```

Laufzeit:

- Mit binärem Min-Heap: $O((|V| + |E|) \log |V|)$
- Mit Fibonacci-Heap: $O(|V| \log |V| + |E|)$

Übersicht


pbfcomics.com
"Mean old farmer Ben scared away Billy and his brother, threatening them with a rake."
Billy
There there, Benjamin. We've made it through winter before. We'll do it again.